Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Теория вероятностей

по направлению подготовки

09.03.03 Прикладная информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Искусственный интеллект и большие данные

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.П. Сущенко

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук

ИОПК-1.2 Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности

ИОПК-1.3 Обладает необходимыми знаниями для исследования информационных систем и их компонент

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

Контрольные работы

1) Теоретические вопросы
2) Практические задачи по теме

2.1.

Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине

Теоретические вопросы (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Раздел 1

1. Описание и аксиоматическое определение случайного события.
2. Операции над событиями.
3. Классическое определение вероятности.
4. Геометрическое определение вероятности.
5. Аксиоматическое определение вероятности.
6. Формула полной вероятности.
7. Различные варианты формулы полной вероятности.
8. Формула Байеса.
9. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
10. Теоремы Муавра-Лапласа.
11. Теорема Пуассона. Простейший поток однородных событий.
12. Функции множеств и их свойства.

Раздел 2

1. Борелевская прямая.

2. Критерий измеримости.
3. Аксиоматическое определение случайных величин и их свойства.
4. Функция распределения вероятностей значений случайной величины и её свойства.
5. Плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины и её свойства.
6. Ряд распределения вероятностей значений дискретной случайной величины и его свойства.
7. Конкретные распределения случайных величин, их характеристики и параметры.
8. Многомерные случайные величины, их функции распределения, условия согласованности.
9. Многомерные смешанные случайные величины.
10. Условные законы распределения.
11. Преобразование одномерных случайных величин.
12. Преобразование многомерных случайных величин.
13. Сумма, частное, модуль компонент двумерных случайных величин.
14. Интеграл от случайной величины по вероятностной мере – интеграл Лебега.
15. Интеграл Стилтьеса – числовые характеристики случайных величин.
16. Математическое ожидание, его свойства.
17. Дисперсия, её свойства.
18. Начальные и центральные моменты случайных величин, их семиинварианты.
19. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции.
20. Экспоненциальные случайные величины, их свойства.
21. Условное математическое ожидание.
22. Формула полной вероятности для условного математического ожидания.

Раздел 3

1. Типы сходимостей последовательностей случайных величин.
2. Центральная предельная теорема в простейшей форме. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
3. Условия Линдеберга и Ляпунова.

4. Центральная предельная теорема в форме Линдеберга с доказательством.
5. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова с доказательством.
6. Закон больших чисел в форме Чебышева и Бернулли.
7. Лемма Бореля-Контелли – закон нуля и единицы.
8. Теорема сходимости почти наверное, если сходится ряд из абсолютных моментов.
9. Лемма Кронекера и неравенство Гаека-Реньи.
10. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова в общем виде.
11. Частные случаи усиленного закона больших чисел в форме Колмогорова. Теорема Бореля.

Типовые практические задания для проведения текущего контроля (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

1. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что: а) только второй студент взял «хороший» билет; б) оба студента взяли «хорошие» билеты.
2. Семь человек вошли в лифт на первом этаже восьмиэтажного дома. Какова вероятность, что на одном этаже вышли два человека?
3. В поезде (10 вагонов) случайно оказались преступник и комиссар Мегрэ. Какова вероятность того, что они находятся: а) в одном вагоне; б) в соседних вагонах?
4. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель для первого охотника равна 0,8, для второго – 0,7. Какова вероятность попадания в волка? Как изменится результат, если охотники сделают по 2 выстрела?
5. Одновременно бросаются три игральные кости. Найти вероятность выпадения трех «троек», если известно, что: а) на одной кости выпало три очка; б) по крайней мере на двух костях выпали «тройки»; в) на всех костях выпало одинаковое количество очков; г) на всех костях выпало нечетное количество очков.
6. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет 4 очка, при условии, что на всех костях выпали грани с четным числом очков
7. Студент 2-го курса ИПМКН школы знает, что его доход за месяц есть случайная величина X, равномерно распределенная на интервале (7; 10). А) Оценить

вероятность события $7{,}5 < X < 9{,}5$. Б) Найти вероятность этого события. Как вы считаете, хорошее ли приближение вероятности получено в А).

8. Известно, что X и Y независимые случайные величины и имеют конечные дисперсии. Доказать, что $D\{X \cdot Y\} \geq DX \cdot DY$. Что должно быть известно о случайных величинах, чтобы выполнялось равенство.
9. Известно, что X, Y независимые случайные величины, имеющие свои законы распределения ($F_X(x), F_Y(y)$). Найти распределение $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$.

10. Достаточно ли выполнения свойства попарной независимости величин $x, y, z, u,$ чтобы выполнялось $D\{x+y+z+u\} = D\{x\} + D\{y\} + D\{z\} + \{u\}$

11. Пусть случайная величина ξ_n - общее число выпавших очков при n независимых подбрасываниях правильной игральной кости.

a. Найти $M\xi_n, D\xi_n$; b. Найти n, при котором выполняется неравенство: $P\left\{\left|\frac{\xi_n}{n} - 3{,}5\right| \geq 0{,}1\right\} \leq 0{,}1$.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все теоретические вопросы и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны правильные ответы на все теоретические вопросы и все задачи, но в ответе или решении содержится одна ошибка или две, три несущественные.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если ответ на теоретический вопрос неполный, решение задач содержит ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответ на теоретический вопрос отсутствует, решение задач содержит существенные ошибки.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзаменационные вопросы (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

1. Описание и аксиоматическое определение случайного события.
2. Операции над событиями.
3. Классическое определение вероятности.
4. Геометрическое определение вероятности.
5. Аксиоматическое определение вероятности.

6. Формула полной вероятности.
7. Различные варианты формулы полной вероятности.
8. Формула Байеса.
9. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
10. Теоремы Муавра-Лапласа.
11. Теорема Пуассона. Простейший поток однородных событий.
12. Функции множеств и их свойства.
13. Борелевская прямая.
14. Критерий измеримости.
15. Аксиоматическое определение случайных величин и их свойства.
16. Функция распределения вероятностей значений случайной величины и её свойства.
17. Плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины и её свойства.
18. Ряд распределения вероятностей значений дискретной случайной величины и его свойства.
19. Конкретные распределения случайных величин, их характеристики и параметры.
20. Многомерные случайные величины, их функции распределения, условия согласованности.
21. Многомерные смешанные случайные величины.
22. Условные законы распределения.
23. Преобразование одномерных случайных величин.
24. Преобразование многомерных случайных величин.
25. Сумма, частное, модуль компонент двумерных случайных величин.
26. Интеграл от случайной величины по вероятностной мере – интеграл Лебега.
27. Интеграл Стилтьеса – числовые характеристики случайных величин.
28. Математическое ожидание, его свойства.
29. Дисперсия, её свойства.
30. Начальные и центральные моменты случайных величин, их семиинварианты.
31. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции.

32. Экспоненциальные случайные величины, их свойства.
33. Условное математическое ожидание.
34. Формула полной вероятности для условного математического ожидания.
35. Типы сходимостей последовательностей случайных величин.
36. Центральная предельная теорема в простейшей форме. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
37. Условия Линдеберга и Ляпунова.
38. Центральная предельная теорема в форме Линдеберга с доказательством.
39. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова с доказательством.
40. Закон больших чисел в форме Чебышева и Бернулли.
41. Лемма Бореля-Контелли – закон нуля и единицы.
42. Теорема сходимости почти наверное, если сходится ряд из абсолютных моментов.
43. Лемма Кронекера и неравенство Гаека-Реньи.
44. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова в общем виде.
45. Частные случаи усиленного закона больших чисел в форме Колмогорова. Теорема Бореля.

Типовые экзаменационные билеты:

Экзаменационный билет № 1

1. Описание и аксиоматическое определение случайного события.
2. Сумма, частное, модуль компонент двумерных случайных величин.
3. Теорема сходимости почти наверное, если сходится ряд из абсолютных моментов.

Задачи:

1. СВ X распределена согласно закону $\mathrm{P}\{X=k\}=\frac{m^k}{k!}e^{-m}$, $k=0,1,2,3....$ Доказать, что выполняется неравенство: $P\{0<X<2m\}>\frac{m-1}{m}$.

2. Вероятность того, что изготовленный 1 бригадой холодильник будет первосортный, равна 0,8. При изготовлении такого же холодильника второй бригадой эта вероятность

равна 0,9. Первой бригадой изготовлено три телевизора, второй – четыре. Найти вероятность того, что все пять телевизоров первосортные.

Экзаменационный билет № 2

1. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
2. Плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины и её свойства.
3. Центральная предельная теорема в форме Линденберга с доказательством.

Задачи:

1. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$. Выяснить – применим ли ЗБЧ:

   а) если $M\xi_i = 0,\ D\xi_i = i^{\alpha},\ i = 1, 2, ...(\forall \alpha < 1)$

   б) если каждая ξ_i, $i = 1, 2, 3, ...$ имеет распределение, $a > 0$: **(3)**

ξ_i	***-ia***	***0***	***ia***
p	$\frac{1}{2i^2}$	$1-\frac{1}{i^2}$	***?***

2. N элементов размещены по N местам, а затем случайным образом переставлены. Найти вероятность P_N того, что хотя бы один элемент окажется на своем месте, и $\lim\limits_{N\to\infty} P_N$.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся показал отличный уровень владения всеми теоретическими вопросами, показал все требуемые умения и навыки решения практических задач

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся овладел всеми теоретическими вопросами, частично показал основные умения и навыки при решении практических задач

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся имеет недостаточно глубокие знания по теоретическим разделам дисциплины, показал не все основные умения и навыки при решении практических задач

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы по отдельным теоретическим разделам дисциплины и не владеет основными умениями и навыками решения практических задач

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций) (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Тестовые вопросы

1. Как называется формула: $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(AH_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)$?

a. Формула полной вероятности

b. Формула Байеса

c. Формула произведения событий

d. Формула произведения для независимых событий

Ответы: a

2. Найдите числовые характеристики случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона с параметром 3.

a. $M\xi = 3, D\xi = 3$

b. $M\xi = 0, D\xi = 3$

c. $M\xi = 3, D\xi = 0$

d. $M\xi = \frac{1}{3}, D\xi = \frac{1}{3}$

Ответы: a

3. Выберете выражение плотности вероятностей для случайной величины, распределенной закону Пуассона:

a. $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

b. $P\{\xi = m\} = p(1-p)^m,\ m = 0,1,2 \ldots$

c. $P\{\xi = m\} = \frac{\boldsymbol{a}^m}{m!}e^{-\boldsymbol{a}},\ m = 0,1,2 \ldots$

d. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$

Ответы: b

4. В каком направлении осуществляется движение по траектории поиска минимума функции с применением метода градиентного спуска:

a. в произвольном направлении

b. в направлении увеличения второй производной функции

c. в направлении антиградиента

d. в направлении убывания третьей производной функции

Ответы: с

5.Если появление одного из двух событий не исключает возможность появления другого в том же испытании, то такие события называются…

a. независимыми
b. несовместными
c. совместными
d. равновозможными

Ответы: с

6.Укажите понятие полной системы (группы) событий

a. события являются единственно возможными и несовместимыми исходами некоторого опыта (испытания)
b. событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из конечного числа событий
c. событие, состоящее в совместном осуществлении событий
d. два единственно возможных и несовместных события

Ответы: a

7.Укажите условие нормировки дискретной случайной величины

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
b. $\sum_{i} p_i = 1$
c. $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = 1$
d. $\sum_{i} x_i \cdot p_i = 1$

Ответы: b

8. Функция распределения случайной величины указывает это

a. плотность распределения случайной величины
b. вероятность того, что случайная величина находится в интервале от X до $X + \Delta X$
c. вероятность того, что случайная величина принимает значения не больше X
d. среди приведённых ответов нет правильного

Ответы: d

9. Укажите формулу плотности вероятности нормально распределённой случайной величины – формулу гаусса

a. $\frac{\lambda^{X}}{X!}\exp(-\lambda)$
b. $\frac{1}{\sqrt{npq}}\exp(-\frac{x^2}{2})$

c. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$

d. $C_n^X p^X q^{n-X}$

Ответы: c

10. При увеличении математического ожидания график нормального распределения…

a. становится шире
b. смещается влево
c. становится уже
d. смещается вправо

Ответы: d

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ x^2 & при \quad 0\le x<1 \\ 1 & при \quad x\ge 1 \end{cases}$

плотность распределения вероятностей имеет вид:

a. $f(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ 2x & при \quad 0\le x<1 \\ 1 & при \quad x\ge 1 \end{cases}$

b. $f(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ 2x & при \quad 0\le x<1 \\ 0 & при \quad x\ge 1 \end{cases}$

c. $f(X)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ \frac{x^3}{3} & при \quad 0\le x<1 \\ 0 & при \quad x\ge 1 \end{cases}$

d. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\exp(-\frac{x^2}{2})$

Ответы: b

12. Корреляционный момент μ_{xy} двух независимых случайных величин равен

a. $\mu_{xy}=1$
b. $\mu_{xy}=0$
c. $\mu_{xy}<1$
d. $\mu_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)$

Ответы: d

Критерии оценивания:

Результаты тестирования определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Отлично (12 баллов)

Обучающийся свободно владеет основным математическим инструментарием, имеет глубокие знания по теоретическим разделам дисциплины, владеет методами постановки целей и выбору путей достижения.

Хорошо (11 – 9 баллов)

Обучающийся владеет основным математическим инструментарием, умеет определять методы решения типовых задач, нацелен на получение правильного результата.

Удовлетворительно (8-6 баллов)

Обучающийся имеет недостаточно глубокие знания по теоретическим разделам дисциплины, показал не все основные умения и навыки, недостаточно владеет понятийным аппаратом в области математики, основными математическими приемами решения стандартных задач.

Неудовлетворительно (5 и менее баллов)

Обучающийся имеет существенные пробелы по отдельным теоретическим разделам дисциплины и не владеет основными математическими приемами решения стандартных задач.

Информация о разработчиках

Даммер Диана Дамировна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теории вероятностей и математической статистики, доцент