

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт «Умные материалы и технологии»

УТВЕРЖДЕНО:
Директор Института «Умные
материалы и технологии»
И.А. Курзина

Оценочные материалы по дисциплине

Теория узлов. Топология

по направлению подготовки

27.03.05 Инноватика

Направленность (профиль) подготовки:
**Tomsk International Science Program, с профессиональным модулем Молекулярная
инженерия / Molecular Engineering**

Форма обучения
Очная

Квалификация
Инженер

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
И.А. Курзина

Председатель УМК
Г.А. Воронова

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-1 – Способен формулировать и анализировать задачи профессиональной деятельности на основе знаний естественных, математических и технических наук, с учетом требований законодательства.

– ПК-2. Способен решать профессиональные задачи на основе знаний в сфере биотехнологии и молекулярной инженерии на основе знаний естественных, математических и технических наук, а также математических методов и моделей.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.2. Умеет анализировать исходные данные в профессиональных задачах на основе знаний естественных, математических и технических наук, нормативов, регулирующих научную и производственную деятельность.

РОПК-2.1. Знает существующие подходы к решению профессиональных задач, в том числе на основе математических методов и моделей.

РОПК-2.2. Умеет планировать, выбирать методы и способы решения профессиональных задач, в том числе с использованием математических методов и моделей.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

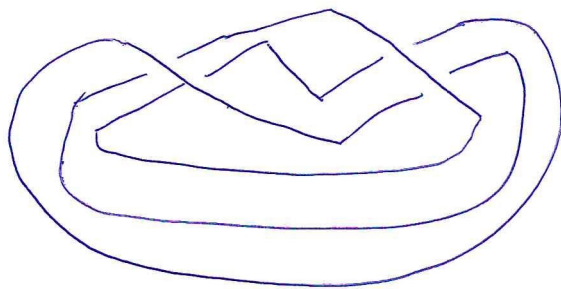
Элементы текущего контроля:

- индивидуальное задание;
- коллоквиум;
- контрольная работа.

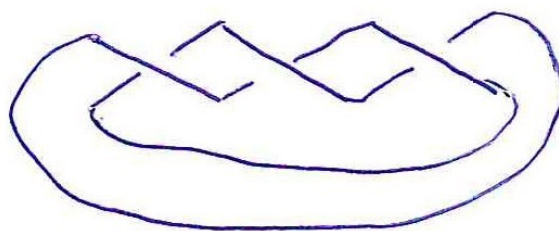
2.1 Индивидуальное задание (РООПК-1.2)

Задание 1.1.

Используя движения Рейдермейстера, показать, что $K_{3,2} \cong K_{2,3}$.



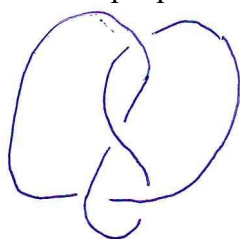
$K_{3,2}$



$K_{2,3}$

Задание 1.2.

Показать, что $E \cong E^i$ (E^i - зеркальный образ диаграммы E , полученный путём переключения всех перекрёстков).



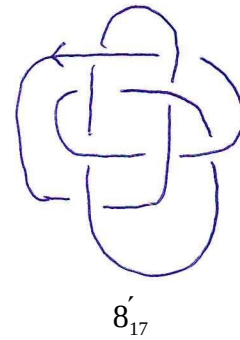
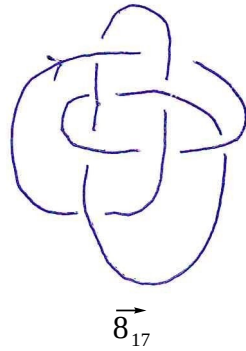
E



E^i

Задание 1.3.

Показать, что $\vec{8}_{17} \cong \vec{8}_{17}^i$ (это покажет, что $\vec{8}_{17} \not\cong \vec{8}_{17}'$)



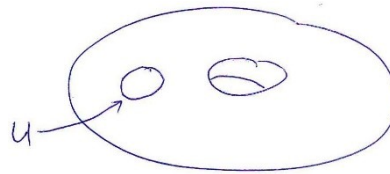
Задание 1.4.

Доказать, что $(S^3, K_{n,m}) \cong (S^3, K_{m,n})$, если $\text{НОД}(m, n) = 1$.

Задание 1.5.

Представьте $K_{m,n} \subset S^1 \times S^1$ как вложение кривой на торе $S^1 \times S^1$. (при $\text{НОД}(m, n) = 1$).

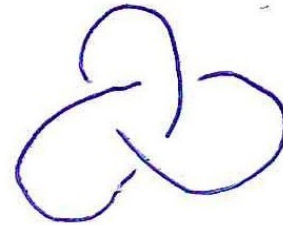
Показать, что существует сохраняющий ориентацию автогомеоморфизм h пространства $S^1 \times S^1$ такой, что $h(S^1 \times S^1, K_{m,n}) = (S^1 \times S^1, U)$, где U – тривиальная окружность на торе.



Задание 1.6.

Вычислить одно представление для $\pi_1(E) \cong \pi_1(S^3 \setminus E)$, и использовать этот результат, чтобы доказать, что $E \not\cong T$, где T – это узел трилистник.

E



$T = K_{2,3}$

Задание 1.7.

Доказать, что представление Виртингера для диаграммы узла K даёт группу G , такую, что это группа (с точностью до изоморфизма) под движениями Редермейстера, является инвариантом.

Задание 1.8.



K

а) Выведите одно представление для $\pi_1(M^3(K))$, где $M^3(K)$ – многообразие Пуанкаре.

б) Покажите, что $H_1(M^3(K))$ – тривиальная группа

Задание 2.1.

Пусть $x * y = 2y - x$ для $x, y \in Z$ или $x, y \in Z/nZ$ для некоторого натурального числа n .

Показать, что

(a) $x * x = x$

(b) $(x * y) * y = x$

(c) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$

При Z/nZ бинарная операция $\dot{\cdot}$ даёт действия каждого класса вычетов на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$ через отображение $x \mapsto x * k$. Пусть $p(k)$ – эта перестановка. Покажите, что множество перестановок, полученные таким образом, порождает диэдральную группу D_{2n} (т.е. группу симметрий правильного n -угольника), если n нечетное.

Задание 2.2.

Пусть G – группа с операцией умножения $\dot{\cdot}$, определенной следующим образом:

$g * h = hg^{-1}h$ для $g, h \in G$. Покажите, что $\dot{\cdot}$ удовлетворяет аксиоме инволюции квандла.

Задание 2.3.

Пусть аксиомы для квандла с двумя бинарными операциями $\dot{\cdot}$ и $\dot{\cdot}$ будут следующие:

1. $x * x = x, x \dot{\cdot} x = x$

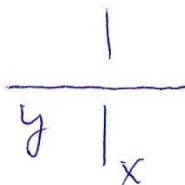
2. $(x * y) \dot{\cdot} y = x = (x \dot{\cdot} y) * y$

3. $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ и $(x \dot{\cdot} y) \dot{\cdot} z = (x \dot{\cdot} z) \dot{\cdot} (y \dot{\cdot} z)$

Покажите, что если M – модуль над $Z[t, t^{-1}]$ и мы определим $a * b = ta + (1-t)b$, $a \dot{\cdot} b = t^{-1}a + (1-t^{-1})b$, то получим структуру квандла.

Задание 2.4.

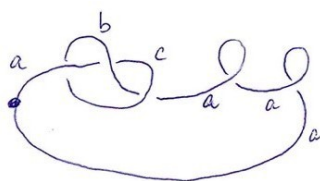
Допустим, мы можем установить соответствие дуг диаграммы узла с некоторыми элементами группы Z/nZ так, что отношение $z = 2y - x$ удовлетворяет в любом перекрестке соотношению $z = x * y = 2y - x$.



Покажите, что мы можем представить фундаментальную группу этого узла в диэдральной группе D_{2n} следующим образом: отправить элемент фундаментальной группы, соответствующий дуге диаграммы в представлении Виртингера, в перестановку $p(x)$, соответствующую цвету x на этой дуге. Сделайте это для узлов «трилистник» и «восмерка».

Задание 3.1.

Многообразие Пуанкаре через хирургии на H -обрамленном «трилистнике»



$$\begin{aligned} \pi(K) = G &= (a, b \vee aba = bab) \\ c &= b^{-1}ab \\ b &= a^{-1}ca \\ a &= c^{-1}bc \end{aligned}$$

Долгота λ для этого обрамления: $\lambda = bac a^{-2}$ (получен по ходу с точки a)

Тогда $\lambda = ba(b^{-1}ab)a^{-2} = bab^{-1}aba^{-2}$.

Тогда $\pi_1(M^3(K)) \cong (a, b \vee aba = bab; bab^{-1}aba^2 = 1)$

$$H_1(M^3(K)) = \pi_1(M^3(K))^{ab} : a^2b = b^2a \Rightarrow a = 1$$

$$1 = bab^{-1}aba^{-2} = b$$

$$H_1(M^3(K)) \cong \{\emptyset\}$$

$$H = \pi_1(M^3(K)) \cong (a, b \vee aba = bab, a^2 = bab^{-1}ab)$$

$$a^2 = bab^{-1}ab \iff a^3 = bab^{-1}aba = bab^{-1}bab = ba^2b$$

$$H \cong (a, b \vee aba = bab, a^3 = ba^2b)$$

Пусть $x = a, y = ab$. Тогда $yx = aba$.

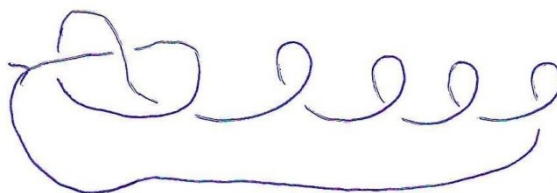
$$(ab)^3 = ababab = abaaba = (aba)^2 = (yx)^2$$

$$abaaba = a(ba^2b)a = a^3a = a^5$$

То есть, $x^5 = y^3 = (yx)^2$.

Задание 3.2.

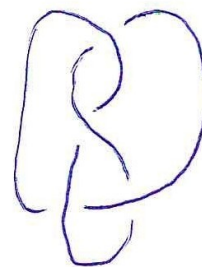
Вычислить $\pi_1(M^3(K'))$, где K' как на рисунке и доказать, что $M^3(K')$ не гомеоморфно многообразию Пуанкаре.



Задание 3.3.



F



E

Показать, что $\partial F = E$, где E – узел восьмерка. Найти парную сигнатуру Зейферта и Александера – Конвея.

Задание 3.4.

Прочитайте задание 1. Пусть $x^5 = y^3 = (yx)^2$. Положим $a = x, b = x^{-1}y$. Докажите, что

а) $aba = bab$

б) $a^3 = ba^2b$

Покажите, что $\pi_1(M^3(K)) \cong \langle x, y \mid x^5 = y^3 = (yx)^2 \rangle$.

Оценка «зачтено» выставляется в случае, если студент правильно выполнил все задания.

Оценка «незачтено» выставляется в случае, если студент выполнил не все задания и/или выполнил задания с существенными ошибками.

2.2 Темы коллоквиума (РОПК-2.1):

1. Приложения рациональных клубков к топологии ДНК.
2. Топоизомеразы и манипуляции с ДНК
3. Теория узлов в понимании белков.
4. Структура белка с глубокими узлами и то, как она может складываться
5. Быстрое обнаружение узлов и применение для предсказания структуры белка.

Оценка «зачтено» выставляется в случае, если студент правильно и развернуто ответил на вопросы.

Оценка «незачтено» выставляется в случае, если студент ответил не все вопросы и/или ответил с существенными ошибками.

2.1.3 Контрольная работа (РОПК-2.2)

Задание 1.

Докажите, что $M^3(K) \cong S^3$, где K как на рисунке:



Задание 2.

Рассмотрите узел, отличный от трилистника и восьмерки, найдите его индекс зацепления, фундаментальную группу его дополнения, полинома Джонса, полином HOMFLY, полином Александера, скобочный полином Кауффмана.

Оценка «зачтено» выставляется в случае, если студент правильно выполнил все задания контрольной работы.

Оценка «незачтено» выставляется в случае, если студент выполнил не все задания контрольной работы и/или выполнил задания с существенными ошибками.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет по курсу проводится устно. При ответе на вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал. Продолжительность зачёта 1,5 часа.

3.1 Примеры вопросов к зачету

1. Зацепления и их диаграммы. Преобразования Рейдемейстера.
2. Теорема Рейдемейстера.
3. Ориентация, зеркальные узлы, обратимые узлы.
4. Полугруппа узлов.
5. Порядок зацепления.
6. Мостовое число.
7. Индекс распутывания.
8. Индекс зацепления.
9. Группа узла.
10. Трехцветная раскраска диаграммы. Раскраска диаграммы в r цветов.
11. Полином Листинга.
12. Скобочный полином Кауффмана.
13. Полином Джонса.
14. Распутывающие соотношения.

15. Свойства полинома Джонса.
16. Ширина полинома Джонса.
17. Полином HOMFLY.
18. Полином шахматной раскраски. Полиномы графов.
19. Заузленные графы в трехмерном пространстве. Преобразования Рейдемейстера для диаграмм заузленных графов.
20. Полином Ямады для графов. Полином Ямады для заузленных графов.
21. Узлы и зацепления во вложениях полных графов. Теорема Конвея – Гордона.
22. Теорема Закса.
23. Задание групп копредставлением.
24. Группа кос.
25. Группа крашенных кос.
26. Группа кос как группа автоморфизмов свободной группы.
27. Косы и зацепления. Теорема Александера.
28. Преобразования Маркова.
29. Линейные представления групп кос. Представлению Бурау.
30. След Окнеану. Полином Джонса от двух переменных.
31. Свойство полинома Джонса от двух переменных. Распутывающие соотношения.
32. Полином Джонса от двух переменных и другие полиномиальные инварианты.
33. 2-связки и рациональные связки.
34. Непрерывные дроби и классификация рациональных связок.
35. Альтернативные определения тангл-дроби.
36. Дроби через раскрашивание.
37. Классификация неориентированных рациональных узлов.
38. Рациональные узлы и их зеркальные отражения.
39. Приложения рациональных связок к топологии ДНК.
40. Топоизомеразы и манипуляции с ДНК
41. Применение теории узлов для понимания строения белков.
42. Структура белка с глубокими узлами и то, как она может складываться.
43. Быстрое обнаружение узлов и применение для предсказания структуры белка.

Результаты дисциплины определяются оценками «зачтено», «не зачтено».

Таблица. Система критериев при оценивании индивидуального задания

Критерии соответствия	Оценка
Содержание ответа являются полными. Студент правильно понимает терминологию. Демонстрирует умение понимать, доказательно и логически связно отвечать на вопросы.	зачтено
Неполное, логически противоречивое изложение ответа. Студент не понимает и неправильно использует терминологию. Не может доказательно и логически связно отвечать на вопросы.	не зачтено

4 Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

1. Какое преобразование описывается теоремой Рейдемейстера?
 - + Зацепление узлов
 - Разбиение полигона
 - Преобразование координат
 - Перемещение вершин
2. Какое свойство узла описывает его зеркальное отображение?
 - + Ориентация

- Полугруппа узлов
 - Индекс распутывания
 - Порядок зацепления
3. Как называется группа, ассоциированная с узлом?
- + Группа узла
 - Группа дифференцирования
 - Группа автоморфизмов
 - Группа пространств
4. Какой полином является первым полиномиальным инвариантом узлов?
- + Полином Листинга
 - Полином Джонса
 - Скобочный полином Кауффмана
 - Полином Хопфа
5. Какие соотношения описывают свойства полинома Джонса?
- + Распутывающие соотношения
 - Нормализационные соотношения
 - Соотношения симметрии
 - Соотношения двойственности
6. Какой полином является обобщенным полиномом для описания узлов?
- + Полином HOMFLY
 - Полином Джонса
 - Полином Лейва
 - Полином Кауффмана
7. Что описывает полином Ямады для заузленных графов?
- + Инвариант заузленных графов
 - Ориентацию графа
 - Порядок вершин графа
 - Индекс зацепления
8. Как называется теорема, связанная с узлами и зацеплениями во вложениях полных графов?
- + Теорема Конвея – Гордона
 - Теорема Брауна
 - Теорема Коксетера
 - Теорема Лефшеца
9. Как называется группа, ассоциированная с косами?
- + Группа кос
 - Группа узлов
 - Группа дифференцирования
 - Группа симметрий
10. Какое преобразование описывается теоремой Александера?
- + Преобразование кос
 - Преобразование диаграмм
 - Преобразование узлов
 - Преобразование графов
11. Какие представления групп кос являются линейными?
- + Линейные представления групп кос
 - Нелинейные представления узлов
 - Симметрические представления
 - Классические представления
12. Какой полином является полиномом Джонса от двух переменных?
- + Полином Джонса
 - Полином Кауффмана

- Полином Листинга
- Полином Громова
- 13. Какие соотношения описывают свойства полинома Джонса от двух переменных?
 - + Распутывающее соотношение
 - Соотношение связности
 - Соотношение инвариантов
 - Соотношение границ
- 14. Какое уравнение связано с представлениями групп кос R-матрицами?
 - + Уравнение Янга – Бэкстера
 - Уравнение свертки
 - Уравнение Гамильтона
 - Уравнение Брауэра
- 15. Какие типы узлов относятся к геометрическим структурам на дополнениях?
 - + Торические, гиперболические и сателитные узлы
 - Простые и сложные узлы
 - Ориентированные и неориентированные узлы
 - Замкнутые и открытые узлы
- 16. Какую структуру имеют орбиболды, связанные с узлом восьмерка?
 - + Гиперболические структуры
 - Эвклидовы структуры
 - Линии структуры
 - Дискретные структуры

Информация о разработчиках

Тарабанов Николай Александрович, канд. филос. наук, доцент философский факультет ТГУ