

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Рабочая программа дисциплины

Симметрия дифференциальных уравнений

по направлению подготовки

03.04.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
О.Н. Чайковская

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ПК 1– Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК 1.1 –Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости.

ИПК 1.2 – Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать.

ИПК 1.3 – Владеет навыками аналитической переработки информации, проведения исследований с помощью современной аппаратуры и информационных технологий, обобщения и представления результатов, полученных в процессе решения задач исследования.

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить аппарат группового анализа дифференциальных уравнений и сформировать навыки нахождения симметрий и построения семейств решений линейных и нелинейных уравнений математической физики.

– Научиться применять понятийный аппарат группового анализа для изучения свойств симметрии в физических теориях и решения практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 3, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: дифференциальное и интегральное исчисление, линейная алгебра, дифференциальная геометрия, математическая физика, функциональный анализ, теория групп.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часа, из которых:

– лекции: 16 ч.;

– практические занятия: 16 ч.;

в том числе практическая подготовка: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Симметрия алгебраических уравнений.

Краткое содержание темы.

Основные идеи группового и симметричного анализа дифференциальных уравнений. Основоположники группового анализа. Геометрическое представление системы алгебраических уравнений. Группы Ли преобразований гладкого многообразия. Инвариантное многообразие. Касательное пространство к многообразию. Инфинитезимальный критерий инвариантности многообразия относительно группы Ли. Алгебра Ли касательных векторов. Инварианты группы в многообразии. Симметрия алгебраического уравнения как инвариантность многообразия. Определяющее уравнение инвариантного многообразия. Условие инфинитезимальной инвариантности многообразия. Нахождение инвариантов группы. Задание инвариантного многообразия инвариантами группы. Дефект многообразия.

Тема 2. Многообразие струй и дифференциальные уравнения с частными производными.

Краткое содержание темы.

Многообразие струй. Структура расслоения. Представление системы дифференциальных уравнений на многообразии струй. Преобразования в многообразии струй. Группа Ли и векторное поле.

Тема 3. Допустимые преобразования в многообразии струй.

Краткое содержание темы.

Преобразования, сохраняющие структуру дифференциального уравнения. Представление Пфаффа. Оператор дифференцирования и его свойства. Распределение Картана. Преобразование инвариантности.

Тема 4. Группа Ли допустимых преобразований в многообразии струй.

Краткое содержание темы.

Однопараметрическая группа Ли допустимых преобразований. Структура генератора группы допустимого преобразования. Свойства допустимых векторных полей.

Тема 5. Алгебраические свойства допустимых векторных полей.

Краткое содержание темы.

Алгебры допустимых векторных полей на многообразии струй. Алгебры, порождаемые допустимыми векторными полями. Алгебра Ли функций на многообразии струй. Идеалы. Факторизация алгебры по идеалу.

Тема 6. Алгебра системы дифференциальных уравнений.

Краткое содержание темы.

Определение симметрий дифференциальных уравнений как функций на многообразии струй. Свойства симметрий. Лиевские и высшие симметрии. Симметрии линейных уравнений.

Тема 7. Определяющее уравнение.

Краткое содержание темы.

Определяющие уравнения алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных. Алгебра симметрий для заданного символа дифференциального оператора. Свойства алгебры симметрий. Идеал в алгебре симметрий и его свойства. Фактор алгебры симметрий по идеалу. Эволюционное уравнение. Симметрии эволюционного уравнения. Фактор-алгебра симметрий эволюционного уравнения. Определяющие уравнения для симметрий фактор-алгебры. Свойства алгебры симметрий эволюционного уравнения. Примеры получения определяющих уравнений для основных уравнений математической физики. Основные задачи теории симметрии уравнений математической физики.

Тема 8. Вычисление точечных групп симметрии для уравнения теплопроводности.

Краткое содержание темы.

Определяющее уравнения симметрий одномерного уравнения теплопроводности. Вычисление лиевских симметрий для уравнения теплопроводности. Вычисление точечных групп преобразований, соответствующих лиевским симметриям.

Тема 9. Примеры нахождения высших симметрий эволюционных уравнений.

Краткое содержание темы.

Вывод определяющего уравнения для симметрий для уравнения Бюргерса и для уравнения Кортевега-де Фриза. Вычисление лиевских симметрий и симметрий высшего порядка для уравнения Бюргерса и для уравнения Кортевега-де Фриза. Нахождение групп инвариантности, соответствующих лиевским симметриям.

Тема 10. Инвариантно-групповые решения.

Краткое содержание темы.

Нахождение инвариантно-групповых решений с помощью симметрий уравнения. Примеры инвариантно-групповых решений уравнения теплопроводности, уравнения Бюргерса и уравнения Кортевега-де Фриза.

Тема 11. Симметрии и законы сохранения.

Краткое содержание темы.

Определение закона сохранения для дифференциального уравнения. Сохраняющиеся плотности и сохраняющиеся токи. Определяющие уравнения. Связь симметрий и законов сохранения. Примеры вычисления законов сохранения для нелинейных эволюционных уравнений.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине осуществляется путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» – <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в третьем семестре проводится в устной форме по билетам.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» – <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» – <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=21972>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (<https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>).

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

Тема 1. Анализ примеров групп преобразований на 2, 3, 4 – мерных многообразиях. Примеры алгебраических уравнений, допускающих группу преобразований. Инвариантные многообразия.

Тема 2. Нахождение инвариантов группы. Уравнения с группой симметрии и инвариантные многообразия. Орбиты группы на инвариантных многообразиях и решения уравнений.

Тема 3. Многообразие струй и его свойства. Примеры записи дифференциальных уравнений на многообразии струй. Примеры преобразований на многообразии струй. Группа преобразований многообразия струй.

Тема 4. Примеры преобразований в многообразии струй и структура расслоения. Представление Пфаффа. Оператор дифференцирования и его свойства. Примеры допустимых преобразований. Проверка условий инвариантности.

Тема 5. Примеры групп Ли допустимых преобразований на многообразии струй. Пример построения допустимого векторного поля и анализ его структуры. Примеры построения алгебры функций на многообразии струй и исследование свойств алгебры функций.

Тема 6. Примеры вывода определяющего уравнения для симметрий уравнений с заданным символом в простых случаях. Анализ свойств алгебры симметрии для конкретных случаев дифференциальных уравнений. Примеры построения алгебры симметрии.

Тема 7. Примеры вычисления алгебры лиевских симметрий для уравнений эволюционного типа.

Тема 8. Примеры построения инвариантно-групповых решений с помощью симметрий. Понятие о частично-инвариантных решениях. Примеры.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

- Дубровин Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1-3 / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Изд-во URSS, 2013. 920 с.
- Ovsyannikov L.V. Lectures on the Theory of Group Properties of Differential Equations. Ed. by N.Kh. Ibragimov. – N.J. USA.: World Scientific B 2013. 156 p.
- Головин С.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений/ С.В., Головин, А.А. Чесноков. — Новосибирск: Новосибирский гос-ун-т, 2009. 119 с.
- Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
- Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983.
- Виноградов А.М. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений/ А.М. Виноградов, И.С. Красильщик, В.В. Лычагин. – М.: Наука, 1983.
- Андреев В.К. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике/ В.К. Андреев, О.В. Капцов, В.В. Пухначев, А.А. Родионов. – Новосибирск: Наука, 1994.
- Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.
- Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – М.: Наука, 1990.

б) дополнительная литература:

- Додд Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения/ Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Наука, 1988. 694 с.
- Gaeta G. Nonlinear symmetries and nonlinear equations. – Dordrecht, Boston, Kluwer: Acad. Publ., London, 1994.
- Mikhailov A.V., Shabat A.B., Sokolov V.V. The symmetry approach to classification of integrable equations /A.V. Mikhailov, Shabat A.B., Sokolov V.V. In “What is integrability?”, ed. Zakharov V.E.: – New York: Springer, 1991.
- Miller W. Symmetry groups and their applications. – New York: Academic Press, 1972.

в) ресурсы сети Интернет:

- открытые онлайн-курсы
- Журнал «Эксперт» – <http://www.expert.ru>
- открытые публикации
- <http://www.sgu.ru/journal/izvestiya/mmi/2011-2/42-48/>
- <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812045468>
- <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S2010194515600757>
- <http://www.sgu.ru/journal/izvestiya/mmi/2011-2/42-48/> Симметричный анализ и некоторые новые точные решения модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами.

– <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717797000563>
Baumann G. Symmetry analysis of differential equations with Mathematic

13. Перечень информационных технологий

- а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:
- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
 - публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).
- б) информационные справочные системы:
- | | | |
|---|---|---|
| – Электронный каталог Научной библиотеки | ТГУ | – |
| http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system | | |
| – Электронная библиотека (репозиторий) | ТГУ | – |
| http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index | | |
| – ЭБС Лань – | http://e.lanbook.com/ | |
| – ЭБС Консультант студента – | http://www.studentlibrary.ru/ | |
| – Образовательная платформа Юрайт – | https://urait.ru/ | |
| – ЭБС ZNANIUM.com – | https://znanium.com/ | |
| – ЭБС IPRbooks – | http://www.iprbookshop.ru/ | |

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории, оборудованные соответствующей техникой (в том числе «Актру»), для реализации учебного процесса в смешанном формате.

15. Информация о разработчиках

Шаповалов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики ФФ НИ ТГУ.