Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Классические поля

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
Фундаментальная и прикладная физика

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
С.Н. Филимонов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

Третья часть представляет собой теоретическую контрольную работу с билетом из одного вопроса по теме 4, проверяющих сформированность компетенции ОПК-2 в соответствии с индикатором ИОПК 2.1. Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Глобальные и локальные симметрии классических полей.

Четвертая часть является устным экзаменом с билетом из двух вопросов по темам 3, 5 и дополнительными вопросами по всему курсу, проверяющими сформированность компетенции ОПК-2 в соответствии с индикатором ИПК 1.1. Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Модель спинорного поля.
2. Модель линеаризованной гравитации.

Примерные дополнительные вопросы:

Вопрос 1. Канонический тензор энергии-импульса.

Вопрос 2. Калибровочная симметрия.

Открытый перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамен.

Перечень вопросов по теме 1.

1. Как реализована группа релятивистской симметрии в квантовой теории? Что такое проективное представление? Почему в квантовой теории допустимы проективные представления групп симметрии? Типы проективных представлений собственной группы Пуанкаре.
2. Теорема Вигнера об (анти)унитарной реализации представления группы симметрии. Почему собственные преобразования Пуанкаре реализуются унитарными операторами?
3. Группы Ли. Генераторы представления группы Ли. Алгебра Ли группы Ли. От чего зависят структурные константы алгебры Ли группы Ли? Определение представления группы Ли генераторами.
4. Свойства генераторов унитарного представления группы Ли. Операторы представления абелевых подгрупп группы Ли.
5. Группа Пуанкаре. Физическая интерпретация. Закон умножения. Группа Лоренца.
6. Собственная, ортохронная и специальная подгруппы, компоненты связности группы Пуанкаре и группы Лоренца. Дискретные преобразования Лоренца.
7. Разложение преобразования Пуанкаре в произведение преобразования Лоренца и трансляции. Топология и размерность группы Лоренца и группы Пуанкаре.
8. Кососимметрические матрицы как локальные координаты в группе Лоренца. Локальные координаты в группе Пуанкаре.
9. Генераторы представления группы Пуанкаре. Физическая интерпретация генераторов.
10. Трансформационные свойства генераторов при преобразованиях Пуанкаре. Коммутационные соотношения в алгебре Пуанкаре.
11. Понятие операторов Казимира. Использование операторов Казимира для классификации неприводимых представлений.
12. Операторы Казимира группы Пуанкаре и группы Лоренца. Оператор Паули-Любанского, трансформационные свойства.
13. Метод Вигнера построения УНП группы Пуанкаре. Малые группы.
14. Трансформационные свойства одночастичных состояний.
15. Типы неприводимых представлений группы Пуанкаре, их физическая интерпретация.
16. Массивные УНП группы Пуанкаре: малая группа, базис состояний, собственные значения операторов Казимира, спин частицы.
17. Безмассовые УНП группы Пуанкаре: малая группа, базис состояний, собственные значения операторов Казимира. "Физические" и "нефизические" безмассовые

УНП. Пуанкаре-инвариантное определение спиральности.

18. Почему пространственные отражения реализуются унитарными операторами, а отражения времени антиунитарными? Трансформационные свойства состояний при дискретных симметриях. Что такое внутренняя четность частицы? Понятие спина для безмассовой частицы.

Перечень вопросов по теме 2.

1. Связь между группами Лоренца и $SL(2, \mathbb{C})$. Явная формула спинорного гомоморфизма.
2. Свойства спинорного гомоморфизма.
3. Связь между неприводимыми представлениями группы Лоренца и группы $SL(2, \mathbb{C})$. Два типа неприводимых представлений группы Лоренца.
4. Определения, законы преобразования ковариантного и контравариантного левого вейлевского спинора. Эквивалентные представления. Спинорные индексы. Чем отличаются точечные индексы от неточечных?
5. Определения, законы преобразования ковариантного и контравариантного правого вейлевского спинора. Эквивалентные представления. Спинорные индексы. Чем отличаются точечные индексы от неточечных?
6. Определение, закон преобразования ковариантного спинтензора типа (A, B) .
7. Подъем и опускание спинорных индексов. Инвариантность спинтензоров
8. Разложение спинтензора на симметричную и антисимметричную часть по паре индексов. Выделение неприводимых симметричных спинтензоров. Неприводимые представления типа $(A/2, B/2)$. Размерность представления типа $(A/2, B/2)$.
9. Вещественные спин-тензорные представления группы Лоренца.
10. Инвариантные спинтензоры
11. Правила конвертации лоренцевских индексов в спинтензоры. Примеры.
12. Конвертация спинтензорных индексов в лоренцевские для спинтензоров ранга (A, A) , $(A+1, A)$, $(A, A+1)$. Условия неприводимости.
13. Спинтензорное представление антисимметричного тензора второго ранга. Условие вещественности.
14. Комплексные локальные координаты в группе Лоренца.
15. "Спинорный" базис генераторов представления алгебры Лоренца. Связь со стандартным базисом.
16. Коммутационные соотношения и запись операторов Казимира алгебры Лоренца в "спинорном" базисе.
17. Дираковский спинор. Связь с вейлевскими спинорами.
18. Матрицы Дирака. Основное тождество для матриц Дирака.
19. Инвариантный смысл матрицы γ^5 . Построение лоренцевских ковариантов из дираковских спиноров.
20. Дираковски сопряженный спинор. Зарядово сопряженный спинор. Майорановский спинор.

Перечень вопросов по теме 4.

1. Принцип действия и уравнения движения.
2. Глобальные и локальные симметрии классических полей.
3. Первая теорема Н"етер.
4. Вторая теорема Н"етер.
5. Тензоры энергии импульса и момента импульса. Тензор Белифанте. Токи и заряды, отвечающие внутренним симметриям.

Перечень вопросов по темам 3, 5.

- 1) Представления группы Пуанкаре на спинтензорных полях.
- 2) Уравнение Кляйна-Гордона.

- 3) Реализация массивных УНП группы Пуанкаре целого спина на спинтензорных полях.
- 4) Реализация массивных УНП группы Пуанкаре полуцелого спина на спинтензорных полях.
- 5) Вещественные массивные УНП группы Пуанкаре.
- 6) Уравнение Дирака.
- 7) Реализация безмассовых УНП группы Пуанкаре на спинтензорных полях.
- 8) Понятие и интерпретация модели классического поля.
- 9) Модели скалярного поля.
- 10) Модель спинорного поля.
- 11) Модель свободного векторного поля.
- 12) Модели спинорной и скалярной электродинамики.
- 13) Калибровочный принцип. Лагранжиан материи, взаимодействующей с полем Янга Миллса.
- 14) Лагранжиан поля Янга-Миллса.
- 15) Калибровочная формулировка гравитации.
- 16) Модель линеаризованной гравитации.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задача (ИОПК 2.2.): Проверить равенство

$$[J^{\mu\nu} , W_\rho] = i \left(\delta_\rho^\mu W^\nu - \delta_\rho^\nu W^\mu \right).$$

Решение:

Проверка коммутатора

$$[J^{\mu\nu} , W_\rho] = i \left(\delta_\rho^\mu W^\nu - \delta_\rho^\nu W^\mu \right).$$

Рассмотрим коммутатор

$$[J^{\mu\nu} , W_\rho] = [J^{\mu\nu} , \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} P^\alpha J^{\beta\gamma}] =$$

используем коммутатор с произведением

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} \left([J^{\mu\nu} , P^\alpha] J^{\beta\gamma} + P^\alpha [J^{\mu\nu} , J^{\beta\gamma}] \right) =$$

подставляем формулы (2.3.8) для коммутаторов

$$= \frac{i}{2} \varepsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} \left(\eta^{\mu\alpha} P^\nu J^{\beta\gamma} - \eta^{\nu\alpha} P^\mu J^{\beta\gamma} + P^\alpha \eta^{\mu\beta} J^{\nu\gamma} - P^\alpha \eta^{\mu\gamma} J^{\nu\beta} - P^\alpha \eta^{\nu\beta} J^{\mu\gamma} + P^\alpha \eta^{\nu\gamma} J^{\mu\beta} \right) =$$

используем метрику η для поднятия индекса у ε

$$= \frac{i}{2} \left(\varepsilon_\rho^\mu{}^\beta{}_\gamma P^\nu J^{\beta\gamma} - \varepsilon_\rho^\nu{}^\beta{}_\gamma P^\mu J^{\beta\gamma} + \varepsilon_{\rho\alpha}{}^\mu{}_\gamma P^\alpha J^{\nu\gamma} - \varepsilon_{\rho\alpha\beta}{}^\mu P^\alpha J^{\nu\beta} - \varepsilon_{\rho\alpha}{}^\nu{}_\gamma P^\alpha J^{\mu\gamma} + \varepsilon_{\rho\alpha\beta}{}^\nu P^\alpha J^{\mu\beta} \right) =$$

перемещаем верхний индекс у ε на первое место, а индекс ρ на второе место

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \left(-\varepsilon^\mu_{\rho\beta\gamma} P^\nu J^{\beta\gamma} + \varepsilon^\nu_{\rho\beta\gamma} P^\mu J^{\beta\gamma} + \varepsilon^\mu_{\rho\alpha\gamma} P^\alpha J^{\nu\gamma} + \varepsilon^\mu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\nu\beta} - \varepsilon^\nu_{\rho\alpha\gamma} P^\alpha J^{\mu\gamma} - \varepsilon^\nu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\mu\beta} \right) = \\
&\text{переименовываем индексы суммирования на } \alpha\beta \\
&= \frac{i}{2} \left(-\varepsilon^\mu_{\rho\alpha\beta} P^\nu J^{\alpha\beta} + \varepsilon^\nu_{\rho\alpha\beta} P^\mu J^{\alpha\beta} + \varepsilon^\mu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\nu\beta} + \varepsilon^\mu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\nu\beta} - \varepsilon^\nu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\mu\beta} - \varepsilon^\nu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\mu\beta} \right) = \\
&\text{приводим подобные} \\
&= \frac{i}{2} \left(-\varepsilon^\mu_{\rho\alpha\beta} P^\nu J^{\alpha\beta} + \varepsilon^\nu_{\rho\alpha\beta} P^\mu J^{\alpha\beta} + 2\varepsilon^\mu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\nu\beta} - 2\varepsilon^\nu_{\rho\alpha\beta} P^\alpha J^{\mu\beta} \right)
\end{aligned}$$

На данном этапе рассмотрим все частные случаи:

$$1. \quad \mu = 0, \nu = 1, \rho = 2$$

$$[J^{01}, W_2] = \frac{i}{2} \left(-\varepsilon^0_{2\alpha\beta} P^1 J^{\alpha\beta} + \varepsilon^1_{2\alpha\beta} P^0 J^{\alpha\beta} + 2\varepsilon^0_{2\alpha\beta} P^\alpha J^{1\beta} - 2\varepsilon^1_{2\alpha\beta} P^\alpha J^{0\beta} \right) =$$

опустим верхний индекс у ε

$$= \frac{i}{2} \left(-\varepsilon_{02\alpha\beta} P^1 J^{\alpha\beta} - \varepsilon_{12\alpha\beta} P^0 J^{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{02\alpha\beta} P^\alpha J^{1\beta} + 2\varepsilon_{12\alpha\beta} P^\alpha J^{0\beta} \right) =$$

распишем явно суммирование по $\alpha\beta$ (используя антисимметричность J)

$$\begin{aligned}
&\text{используем } \varepsilon_{0123} = -1 \\
&= \frac{i}{2} \left(-2P^1 J^{13} + 2P^0 J^{03} + 2(P^1 J^{13}) - 2(P^0 J^{03}) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Этот результат совпадает с коммутатором из условия задачи

$$[J^{01}, W_2] = i \left(\delta_2^0 W^1 - \delta_2^1 W^0 \right) = 0.$$

$$2. \quad \mu = 1, \nu = 0, \rho = 1$$

$$[J^{10}, W_1] = \frac{i}{2} \left(-\varepsilon^1_{1\alpha\beta} P^0 J^{\alpha\beta} + \varepsilon^0_{1\alpha\beta} P^1 J^{\alpha\beta} + 2\varepsilon^1_{1\alpha\beta} P^\alpha J^{0\beta} - 2\varepsilon^0_{1\alpha\beta} P^\alpha J^{1\beta} \right) =$$

опустим верхний индекс у ε

$$= \frac{i}{2} \left(\varepsilon_{11\alpha\beta} P^0 J^{\alpha\beta} + \varepsilon_{01\alpha\beta} P^1 J^{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{11\alpha\beta} P^\alpha J^{0\beta} - 2\varepsilon_{01\alpha\beta} P^\alpha J^{1\beta} \right) =$$

распишем явно суммирование по $\alpha\beta$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \left(2\varepsilon_{0123} P^1 J^{23} - 2\varepsilon_{0123} (P^2 J^{13} - P^3 J^{12}) \right) = \\
&= \frac{i}{2} \left(2\varepsilon_{0123} P^1 J^{23} + 2\varepsilon_{0213} P^2 J^{13} + 2\varepsilon_{0312} P^3 J^{12} \right) = \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon_{0\alpha\beta\gamma} P^\alpha J^{\beta\gamma} = iW_0 = iW^0.
\end{aligned}$$

Этот результат совпадает с коммутатором из условия задачи

$$[J^{10}, W_1] = i \left(\delta_1^1 W^0 - \delta_1^0 W^1 \right) = iW^0.$$

Теоретические вопросы (ИПК 1.1, ИОПК 2.2):

- 1 Лагранжиан поля Янга-Миллса.
- 2 Глобальные и локальные симметрии классических полей.
- 3 Комплексные локальные координаты в группе Лоренца.

Информация о разработчиках

Каратаева Инна Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.