

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Факультет инновационных технологий

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
С. В. Шидловский

Оценочные материалы по дисциплине

Теория вероятностей и математическая статистика

по направлению подготовки

09.03.02 Информационные системы и технологии

Направленность (профиль) подготовки:

Программное и аппаратное обеспечение беспилотных авиационных систем

Форма обучения
Очная

Квалификация
Инженер - программист
Инженер - разработчик

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
О.В. Вусович

Председатель УМК
О.В. Вусович

Томск – 2024

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

ОПК-8 Способен применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.

РООПК-1.2 Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.

РООПК-8.1 Знает математику, методологию и основные методы математического моделирования, классификацию и условия применения моделей, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контроль посещаемости;
- выполнение индивидуального домашнего задания;
- тесты по лекционному материалу.

Индивидуальное домашнее задание №1 (выполняется в рамках СРС, даются различные варианты, проверяется РООПК-1.1)

1. а) В коробке находится 7 синих, 2 черных и 3 зеленых карандаша. Наугад одновременно вынимают 4 карандаша. Найти вероятность того, что все они синие.

б) В лотерее 50 билетов, из которых 5 выигрышных. Какова вероятность получить более одного выигрышного билета, взяв наудачу 4 билета?

2. В мешке смешаны шары трех цветов: 30% белых, 50% красных, остальные зеленые. Определить вероятность того, что при последовательном вытаскивании наугад трех шаров окажется, что все они одного цвета.

3. 45% ноутбуков, имеющихся в магазине, изготовлены на 1-м заводе, 15% на – 2-м, остальные – на 3-м заводе. Вероятности, что ноутбуки, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96, 0,84, 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу ноутбук выдержит гарантийный срок работы.

4. а) При передаче сообщения по каналу связи вероятность искажения одного знака равна 0,01. Какова вероятность, что при передаче сообщения из 5-и знаков допущено одно искажение?

б) При введении вакцины против птичьего гриппа иммунитет создается в 99,98% случаях. Определите (приблизительно) вероятность того, что из 10000 вакцинированных птиц заболеют, по меньшей мере, две птицы.

5. а) Продавец фруктов покупает персики большими партиями. Учитывая скоропортящийся характер товара, он допускает, что 15% фруктов будут подпорчены. Для проверки качества продавец выбирает 7 персиков. Случайная величина X – число подпорченных фруктов среди выбранных.

1) Составить ряд распределения X .

2) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3) Построить график функции распределения $F(x)$.

4) Найти вероятность того, что продавец купит данную партию персиков, если для этого среди выбранных 5 персиков должно быть не более двух подпорченных.

б) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ bx, & 0 \leq x \leq 2.5, \\ 0, & x > 2.5. \end{cases}$$

Определить постоянную b , найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график, вычислить вероятность $P(3 \leq X \leq 5)$. Построить график плотности распределения $f(x)$ этой случайной величины.

Засчитывается только правильно выполненное задание. При выполнении ИДЗ приветствуется использование студентом общих и специализированных компьютерных программ для решения предложенных задач. Оценка «Зачет» или «Незачет». К сдаче электронного тестирования допускаются только студенты, сдавшие ИДЗ на положительную оценку.

Тест по лекционному материалу (выполняется дома, ограничение по времени 1,5 часа, автоматическая проверка ответов, 20 заданий, РООПК-1.1)

Примеры заданий

1. Вставьте пропущенные слова в определения.

События, которые при данном комплексе условий либо всегда наступают, либо никогда не наступают, называются _____.

События, которые при данном комплексе условий могут как наступать, так и не наступать, и предсказать заранее, наступит ли это событие или нет, невозможно, называются _____.

2. В партии из 13 изделий 6 бракованных. Для контроля выбирают 3 изделия. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий не будет ни одного бракованного. (Ответ введите в виде десятичной дроби, округлив до трех знаков после запятой. В качестве разделителя используйте ТОЧКУ)

Ответ: _____

3. Функция распределения - это

a. Это плотность распределения

b. Вероятность того, что случайная величина принимает значение, равное конкретному числу

c. Вероятность того, что случайная величина принимает значение меньше или равно какой-то величине

d. Это ряд распределения

e. Вероятность того, что случайная величина принимает значение меньше какой-то величины

4. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых равны 3 и 8 см соответственно. Какова вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в кольцо, образованное указанными окружностями?

(Ответ введите в виде десятичной дроби, округлив до трех знаков после запятой. В качестве разделителя используйте ТОЧКУ)

Ответ _____

5. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0.22. Сколько надо купить билетов, чтобы из них хотя бы один выиграл с вероятностью не меньше 0.82?

Ответ: _____

Ключи: 1) детерминированными, случайными, 2) 0.122; 3) e ; 4) 0.86; 5) 7.

Индивидуальное задание № 2 (выполняется в рамках СРС, даются различные варианты, для проведения всех расчетов и построений студенты используют общих и специализированных компьютерных программ. Проверяется РООПК-1.1)

1. По заданной вероятности (и заданному числу степеней свободы k) найти критическую точку (квантиль χ_γ), пользуясь соответствующими таблицами (приложение 1–4): а) стандартного нормального распределения; б) распределения «хи-квадрат»; в) распределения Стьюдента; г) распределения Фишера. Нарисовать примерный вид графика плотности распределения, указать критическую точку, заштриховать площадь, соответствующую вероятности $\alpha = 1 - \gamma$, записать пояснения к рисунку. а) $\gamma = 0.98$; б) $\gamma = 0.975$, $k = 6$; в) $\gamma = 0.99$, $k = 8$; г) $\gamma = 0.95$, $k_1 = 9$, $k_2 = 12$.

2. Среднемесячный бюджет студентов в колледжах одного из штатов США оценивается по случайной выборке. С вероятностью 0.954 найдите наименьший объем выборки, необходимый для такой оценки, если среднее квадратичное отклонение предполагается равным 100 у.е., а предельная ошибка средней не должна превышать 20 у.е.

3. Инженер по контролю качества проверяет среднее время горения нового вида электроламп. Для проверки случайным образом было отобрано 100 ламп, среднее время горения которых составило 1075 часов. Предположим, что среднее квадратичное отклонение времени горения для генеральной совокупности известно и составляет 100 часов. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте гипотезу о том, что среднее время горения ламп более 1000 часов. Предположим, что инженер по контролю качества не имеет информации о генеральной дисперсии и использует выборочное среднее квадратичное отклонение. Изменится ли ответ?

4. Дана выборка из непрерывной генеральной совокупности. Необходимо посредством статистической обработки выборки выдвинуть гипотезу о законе распределения изучаемой случайной величины. Оценить эту гипотезу на уровне значимости $\alpha = 0.05$. План решения: 1. составить сгруппированный выборочный статистический ряд, содержащий информацию об интервалах группировки, частотах, относительных частотах, высотах столбцов для построения гистограммы (нормированные частоты) 2. построить гистограмму, предложить гипотезу о виде закона распределения исследуемой случайной величины 3. вычислить числовых характеристик и параметров предполагаемого распределения случайной величины 4. построить теоретический закон распределения согласно выдвинутой гипотезе 5. проверить гипотезу о виде распределения с помощью критерия Пирсона, сформулировать статистическое заключение. Индивидуальные задания (табл. 1) представляют собой выборку из 80-ти наблюдаемых значений для непрерывной случайной величины. Каждая выборка занимает отдельный столбец, номер которого есть номер варианта.

Засчитывается только правильно выполненное задание. При выполнении ИДЗ приветствуется использование студентом общих и специализированных компьютерных программ для решения предложенных задач. Оценка «Зачет» или «Незачет». К сдаче электронного тестирования допускаются только студенты, сдавшие ИДЗ на положительную оценку.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Промежуточная аттестация реализуется путем проведения зачета в третьем семестре. Вопросы по практике (задачи) направлены на оценку сформированности компетенции ОПК 1 (решение типовых задач по темам теории вероятностей), ОПК 8. Вопросы по теории проверяют результат обучения РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 8.1. Студенту, успешно прошедшему тестирование при текущем контроле, засчитывается результат тестирования в качестве положительной оценки на первую половину билета (первый теоретический вопрос и первая задача). В экзаменационном билете должны присутствовать вопросы по практике и теории по основным пройденным темам. Количество вопросов зависит от их трудоемкости, не более двух вопросов по практике и двух вопросов по теории. Для получения оценки «Зачтено», за каждый вопрос билета должна быть получена оценка не ниже тройки.

Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов, выносимых на зачет:

Первый вопрос билета

1. Определение вероятности случайного события.
2. Свойства вероятностей событий.
3. Теорема сложения вероятностей.
4. Независимость случайных событий.
5. Условная вероятность события.
6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
7. Схема Бернулли.
8. Теорема Муавра-Лапласа.
9. Теорема Пуассона.
10. Случайные величины как измеримые функции.
11. Функция распределения случайной величины.
12. Дискретные и непрерывные случайные величины.
13. Плотность распределения вероятностей.
14. Числовые характеристики случайных величин.

Второй вопрос билета

15. Выборочный метод. Эмпирические законы распределения
16. Точечные оценки параметров распределения. Эмпирические моменты.

Приведите примеры общих и специализированных компьютерных программ, используемых Вами для вычисления эмпирических моментов выборочных данных.

17. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

18. Проверка гипотез о законе распределения случайной величины. Критерий Пирсона.

Примеры задач на зачет:

1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

2. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже.

3. Студент пришел на зачет, зная ответы на 20 вопросов из 30. с какой вероятностью он сдаст зачет, если в случае его отказа отвечать на первый заданный вопрос, он получает еще один вопрос.

4. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму составляет: 0.9 для лыжника, 0.8 для велосипедиста, 0.6 для бегуна. Выбранный наудачу спортсмен выполнил норматив. Найти вероятность того, что норматив выполнил бегун.

5. Производится 5 независимых испытаний, в каждом из которых событие наступает с вероятностью 0.6. Рассматривается случайная величина X – число появлений события в пяти испытаниях. Построить ряд распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение случайной величины X .

6. К случайной величине X прибавили 10. Как от этого изменятся ее характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

7. Производится 3 независимых испытания, в каждом из которых может появиться событие с вероятностью 0.6. Испытания производятся до первого появления события, после чего испытания прекращаются. Случайная величина X – число произведенных опытов. Построить ряд распределения случайной величины X , найти математическое ожидание и дисперсию.

8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(3, 9)$, записать плотность и функцию распределения вероятностей случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(3, 9)$.

9. Найти математическое ожидание и дисперсию, случайной величины, если плотность распределения ее равна $f(x) = 5e^{-5x}$, $x > 0$. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(2, 5)$, записать функцию распределения случайной величины, заданной такой плотностью распределения.

10. Из генеральной совокупности X , распределенной нормально, извлечена выборка

x_i	2	4	5	6	8
n_i	2	4	3	5	6

. Построить доверительный интервал для оценки математического ожидания генеральной совокупности, если известно $\sigma = 3$, $\gamma = 0.95$.

11. Из генеральной совокупности X , распределенной нормально, извлечена выборка

x_i	2	4	6
n_i	2	4	4

. Построить доверительный интервал для оценки среднеквадратического отклонения генеральной совокупности, если известно $\gamma = 0.95$.

12. Совокупность разбита на две группы: первая:

x_i	3	6
n_i	2	3

, вторая:

x_i	2	3	6
n_i	2	2	4

.

Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии.

13. Имеются две генеральные совокупности X и Y , распределенные нормально. Из этих совокупностей извлечены выборки x и y соответственно с объемами $n = 10$, $m = 12$. По

каждой из выборок найдены исправленные дисперсии $S_x^2 = 24.4$, $S_y^2 = 12.2$. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей X и Y , при

конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) > D(Y)$ при заданном уровне значимости $\alpha = 0.05$.

14. По результатам эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда 10, 12, 12, 14, 12, 10, 14, 16, 10, 12, 16, 14, 14, 12, 12, 10, 10, 14, 16, 16, 10, 12, 12, 12, 14, 12, 14, 14, 14, 12. Требуется: 1) представить данные в виде статистического ряда; 2) представить статистический ряд графически; 3) определить моду и медиану; 4) определить точечные оценки для математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения. Для решения задачи рекомендуется использовать специальные компьютерные программы.

Критерии оценивания

В основе оценивания ответов на зачёте лежат принципы объективности, справедливости и всестороннего анализа уровня знаний студентов.

При выставлении «зачтено» оценивается: знание фактического материала, а также культура речи, глубина знания, аргументированность ответа, связь теории и практики, умение решить задачу.

«Не зачтено» ставится студенту, имеющему существенные пробелы в знании основного материала по программе и допустившему принципиальные ошибки при ответе на вопросы билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Данный тест может быть предложен студентам 3 или 4 курса после получения «Зачтено» по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Предлагается один вариант теста. Для успешного выполнения теста все задания должны быть решены верно, кроме того, решение каждого задания должно быть снабжено определением основных математических понятий, встретившихся в его формулировке.

Вариант 1

1. Согласно классическому определению, вероятность события A можно вычислить

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

по формуле $\frac{m}{n}$, где (выберите правильное утверждение)

- а) m – общее число всех элементарных исходов испытания, n – число исходов испытания, благоприятствующих событию A ;
- б) n – общее число всех элементарных исходов испытания, m – число исходов испытания, благоприятствующих событию A .

2. Какое из перечисленных выражений обозначает появление ровно одного из трех событий A, B, C

- а) $A + B + C$
- б) $\overline{A + B + C}$
- в) $A \cdot B \cdot C$
- г) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

3. Условная вероятность $P(A/B)$ (или $P_B(A)$) – это (продолжите верно определение)

- а) вероятность одновременного наступления событий A и B ;
- б) вероятность события B , вычисленная в предположении, что событие A уже произошло;
- в) вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B уже произошло;
- г) вероятность наступления по крайней мере одного из событий A и B ;
- д) вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B не может произойти.

4. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону и

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-60)^2}{50}}$$

имеет плотность распределения . В каком диапазоне с вероятностью 0,9973 содержатся возможные значения случайной величины (правило 3σ)?

- а) (-15; 15)
- б) (-60; 60)
- в) (45; 75)
- г) (55; 65)
- д) (60; 75)

5. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n > 30$, представленная статистическим рядом

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Тогда для вычисления точечной оценки выборочной дисперсии можно использовать формулу

а) $D_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$;

б) $D_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i$;

в) $D_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) n_i$

г) $D_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i$.

6. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$, представленная статистическим рядом

x_i	4	7	8
n_i	30	12	18

Найти оценку генеральной средней по данной выборке.

- а) 4
- б) 5,8
- в) 6,3
- г) 8

д) $\frac{19}{60}$

7. По выборке объема $n = 10$ найдена выборочная дисперсия $D_v = 3,6$. Тогда исправленное среднее квадратическое отклонение равно

- а) 2,0
- б) 3,24
- в) 1,8
- г) 4,0

Ключ к тесту

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	б	г	в	в	г	б	а

5. Информация о разработчиках

Пауль Светлана Владимировна, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Шкленник Мария Александровна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики.