

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан
Л.В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Общая алгебра

по направлению подготовки / специальности

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование

Форма обучения

Очная

Квалификация

Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Год приема

2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить навыки работы с профессиональной литературой по алгебре для успешной учебной деятельности (РООПК 1.1).

– Научиться выбирать оптимальную методику и подбирать алгебраический аппарат для решения задач профессиональной деятельности (РООПК 1.2).

– Овладеть основными понятиями и результатами алгебры, а также некоторыми стандартными методами доказательства теорем алгебры (РООПК 1.3).

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, является обязательной для изучения.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Шестой семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: знание программы «Алгебра» в объеме 1 курса.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

в том числе практическая подготовка: 0 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Алгебра многочленных матриц

Каноническая форма, ее единственность. Эквивалентность λ -матриц, критерии эквивалентности. Инвариантные множители. Унимодулярные λ -матрицы. Элементарные делители. Кольцо матричных многочленов. Делимость матричных многочленов. Основная теорема о подобии числовых матриц (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 2. Жорданова нормальная форма

Приведение матриц к жордановой нормальной форме (алгебраический подход). Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Алгоритмы (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 3. Элементы теории групп

Примеры групп. Понятие подгруппы. Порождающие множества. Таблицы Кэли. Гомоморфизмы групп. Теорема Кэли. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа и ее следствия. Факторгруппы. Теоремы о циклических группах. Теоремы о гомоморфизмах. Коммутатор. Коммутант группы. Примеры. Теорема о коммутанте. Центр группы. Простые группы. Работы Э. Галуа и их роль в развитии теории групп. Последние достижения теории групп (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 4. Элементы теории колец

Примеры колец. Группа обратимых элементов кольца. Алгебраические и трансцендентные элементы. Целостные кольца (коммутативные области целостности). Понятие идеала. Факторкольца. Теоремы о гомоморфизмах колец. Прямые суммы и прямые произведения колец. Операции над идеалами. Китайская теорема об остатках и ее следствия (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 5. Разложения на простые множители

Простые элементы целостных колец. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Евклидовы кольца. Примеры. Алгоритм Евклида. Примеры колец с разложением на простые множители. Кольцо целых гауссовых чисел. Кольца главных идеалов (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 6. Факториальные кольца

Факториальные кольца. Примеры. Факториальность колец главных идеалов. Содержание многочлена. Лемма Гаусса. Неприводимые многочлены. Критерий неприводимости Эйзенштейна. Факториальность колец многочленов над факториальными кольцами (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 7. Элементы теории полей.

Характеристика поля. Критерии подкольца и подполя. Расширения полей. Алгебраически замкнутые поля. Теорема Штейница (б/д). Существование конечных полей. Алгебраические и трансцендентные расширения полей. Поле разложения многочлена (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 8. Евклидовы пространства

Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши-Буняковского. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ортогональные базисы и ортогональные матрицы. Проекция вектора на подпространство (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 9. Операторы евклидовых и эрмитовых пространств.

Унитарные операторы и унитарные матрицы. Их свойства. Ортогональные базисы унитарных пространств. Оператор, сопряженный к данному. Критерий сопряженности. Самосопряженные операторы. Неотрицательные самосопряженные линейные операторы, канонический вид этих операторов. Алгоритмы (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3).

Тема 10. Билинейные и квадратичные формы.

Связь матрицы билинейной формы в разных базисах. Квадратичные формы. Канонический вид формы. Метод Лагранжа приведения квадратичные формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичные формы. Квадратичные формы в евклидовых пространствах. Приведение к главным осям. Алгоритмы. Распадающиеся квадратичные формы (ООПК 1.1, ООПК 1.2, ООПК 1.3).

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, выполнения домашних заданий (ООПК 1.1, ООПК 1.2, ООПК 1.3), проведения контрольных работ (ООПК 1.2, ООПК 1.3) и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена – 1,5 часа.

Пример экзаменационного билета:

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Общая алгебра

Билет № 5

1. Докажите теорему о коммутанте группы.
2. Покажите, что если L_1 и L_2 – самосопряженные операторы, то оператор $L_1L_2 + L_2L_1$ самосопряжен.
3. Приведите квадратичную форму $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к главным осям.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения

Таблица 1. Система критериев при оценивании ответов на вопросы экзамена

Полный, логически обоснованный ответ, изложенный кратко и ясно	отлично
Полный ответ, но имеются не критичные логические несоответствия, при этом форма изложения достаточно ясная и понятная.	хорошо
Ответ не является полным (примерно 50% – 60%), но изложенная часть логически не противоречива и изложена ясно и понятно.	удовлетворительно
Ответ является неполным (примерно 30% – 40%), изложение логически противоречиво. На дополнительные вопросы нет ясного ответа.	неудовлетворительно
Неполный логически противоречивый недоказательный ответ.	неудовлетворительно
Ответ отсутствует по сути.	неудовлетворительно

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» – <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=24327>

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» – <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=24327>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

Наименование разделов и тем	Часы
Тема 1. Алгебра многочленных матриц Каноническая форма, ее единственность. Эквивалентность λ-матриц, критерии эквивалентности. Инвариантные множители. Унимодулярные λ-матрицы. Элементарные делители. Кольцо матричных многочленов. Делимость матричных многочленов. Основная теорема о подобии числовых матриц.	4
Тема 2. Жорданова нормальная форма Приведение матриц к жордановой нормальной форме (алгебраический подход). Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Алгоритмы.	2
Тема 3. Элементы теории групп Примеры групп. Понятие подгруппы. Порождающие множества. Таблицы Кэли. Гомоморфизмы групп. Теорема Кэли. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа и ее следствия. Факторгруппы. Теоремы о циклических группах. Теоремы о гомоморфизмах. Коммутатор. Коммутант группы. Примеры. Теорема о коммутанте. Центр группы. Простые группы. Работы Э. Галуа и их роль в развитии теории групп. Последние достижения теории групп.	4
Тема 4. Элементы теории колец Примеры колец. Группа обратимых элементов кольца. Алгебраические и трансцендентные элементы. Целостные кольца (коммутативные области целостности). Понятие идеала. Факторкольца. Теоремы о гомоморфизмах колец. Прямые суммы и прямые произведения колец. Операции над идеалами. Китайская теорема об остатках и ее следствия.	4

Тема 5. Разложения на простые множители Простые элементы целостных колец. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Евклидовы кольца. Примеры. Алгоритм Евклида. Примеры колец с разложением на простые множители. Кольцо целых гауссовых чисел. Кольца главных идеалов.	2
Тема 6. Факториальные кольца Факториальные кольца. Примеры. Факториальность колец главных идеалов. Содержание многочлена. Лемма Гаусса. Неприводимые многочлены. Критерий неприводимости Эйзенштейна. Факториальность колец многочленов над факториальными кольцами.	2
Тема 7. Элементы теории полей. Характеристика поля. Критерии подкольца и подполя. Расширения полей. Алгебраически замкнутые поля. Теорема Штейница (б/д). Существование конечных полей. Алгебраические и трансцендентные расширения полей. Поле разложения многочлена.	2
Тема 8. Евклидовы пространства Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши-Буняковского. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ортогональные базисы и ортогональные матрицы. Проекция вектора на подпространство.	4
Тема 9. Операторы евклидовых и эрмитовых пространств. Унитарные операторы и унитарные матрицы. Их свойства. Ортогональные базисы унитарных пространств. Оператор, сопряженный к данному. Критерий сопряженности. Самосопряженные операторы. Неотрицательные самосопряженные линейные операторы, канонический вид этих операторов. Алгоритмы.	4
Тема 10. Билинейные и квадратичные формы. Связь матрицы билинейной формы в разных базисах. Квадратичные формы. Канонический вид формы. Метод Лагранжа приведения квадратичные формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичные формы. Квадратичные формы в евклидовых пространствах. Приведение к главным осям. Алгоритмы. Распадающиеся квадратичные формы.	4
Итого	32

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. МЦНМО. Ч. 2. 2020. 367 с.
2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. М.: Лань, 2024. 608 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. ФИЗМАТЛИТ. 2020. 280 с.
4. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. М.: Лань, 2022. 336 с.
5. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Лань, 2009. 736 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Лань, 2013. 432 с.
7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Лань, 2013. 480 с.

б) дополнительная литература:

1. Ляпин Е.С., Айзенштат А.Я., Лесохин. Упражнения по теории групп. М.: Лань, 2010. 2-е изд. стер. 272 с.

2. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р. Упражнения по теории колец, модулей и полей. М.: Факториал Пресс. 2007.
3. Понтрягин Л.С. Алгебра. Знакомство с высшей математикой. УРСС. 2010. 176 с.
4. Босс В. Лекции по математике. Т. 8 Теория групп. УРСС. 2013. 216 с.
5. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р. Упражнения по группам, кольцам и полям. М.: ФЛИНТА. 2012. 212 с.

в) ресурсы сети Интернет:

– открытые онлайн-курсы

<https://teach-in.ru/course/algebra-lectures-timashev>

https://openedu.ru/course/nsu/NSU_LINAL/

http://www.mathprofi.ru/saity_po_matematike.html

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки	ТГУ	–
http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system		

– Электронная библиотека (репозиторий)	ТГУ	–
http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index		

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Чехлов Андрей Ростиславович, д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры ТГУ.