Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Функциональный анализ

по направлению подготовки

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель / Исследователь в области математики и компьютерных наук

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– индивидуальные домашние задания (РООПК 1.3)

Индивидуальное задание № 1: исследуйте на сходимость последовательности функций $x_n(t) = e^{\frac{1}{nt+1}}$ *и* $x_n(t) = n\left(\sqrt{1+\frac{t}{n}} - 1\right)$ в каждом из пространств $C[0;1], L_1(0;1), L_2(0;1)$. Ответ: нет, да, да; да, да, да.

Индивидуальное задание № 2: является ли функционал $f(x) = \int_{-1}^{1}(|t| + 2t)x(t)dt$ ограниченным на каждом из пространств $C[-1;1]$, $L_1(-1;1)$, $L_2(-1;1)$? В случае ограниченности найдите его норму. В противном случае докажите его неограниченность. Ответ: 2, 3, $\sqrt{10/3}$.

Индивидуальное задание № 3: являются ли функционалы $f(x) = \sum_{n=1}^{7} \cos \pi n(x_n + x_{15-n})$ и $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_{2n}}{(2n)!}$ ограниченными на каждом из пространств $c_0,\ l_1,\ l_2$? В случае ограниченности найдите его норму. В противном случае докажите его неограниченность. Ответ: 14, 1, $\sqrt{14}$; $\mathrm{ch}1 - 1,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{((2n)!)^2}}$.

Индивидуальное задание № 4: пусть $E = \mathrm{sp}\{x_1, x_2, x_3\} \subset L_2(a;b)$ и $y \notin E$. Найдите такой $x_0 \in E$, чтобы в пространстве $L_2(a;b)$ выполнялось равенство $\|y - x_0\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|y - x\|$. $x_1(1) \equiv 1,\ x_2(t) = \cos \pi t\ ,\ x_3(t) = \cos^2 \pi t, y(t) = |t|, a = -1,\ b = 1$. Ответ: $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t$.

Индивидуальное задание № 5: найдите сопряженный оператор для оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - ix_2, 0, x_4 - x_3, ix_4)$; для оператора $T: l_2 \to l_2$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1 - x_3, 0, x_5 - x_7, 0, x_9 - x_{11}, \dots)$; для оператора $T: L_2(0;1) \to L_2(0;1)$, $Tx(t) = \int_0^1 \mathrm{sign}(t - 1/2)x(s)ds$. Ответ: $T^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1,\ ix_1,\ x_3,\ x_3 - ix_4)$; $T^*(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 0, -x_1, 0, x_3, 0, -x_3, 0, x_5, 0, -x_5, 0, \dots\ )$; $T^*x(t) = \int_0^1 \mathrm{sign}(s - 1/2)x(s)ds$.

Индивидуальное задание № 6: найдите спектр оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -2x_2, x_3, -4x_4)$. Ответ: $\{1, -2,\ 3, -4\}$.

Индивидуальное задание № 7: найдите спектр операторов $T: L_2(a;b) \to L_2(a;b)$, $Tx(t) = \int_0^{\pi}\left(s\cos t + \frac{\sin t}{2}\right)x(s)ds$, $Tx(t) = \int_0^1(8s + 5t^2s^2 - 4)x(s)ds$. Ответ: $\{0, 1, -2\}$, $\{0, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\}$.

Индивидуальное задание № 8: найдите спектр оператора $T: L_2(0;1) \to L_2(0;1)$, $Tx(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) = \cos t \cdot \cos(1-s)$, если $t \le s$ *и* $K(t,s) = \cos s \cdot \cos(1-t)$ если $s \le t$. Ответ: $\{0\} \cup \{\sin 1\} \cup \left\{\frac{\sin 1}{1-\pi^2 n^2} \mid n = 1,2,\dots\right\}$.

Индивидуальное задание № 9: решите уравнения Фредгольма (а) $x(t) = \mu \int_0^{\pi} \left(s\cos t + \frac{\sin t}{2}\right) x(s)ds + \sin t - 2/\pi$; (б) $x(t) = \mu \int_0^1 (8s + 5t^2 s^2 - 4)x(s)ds + 1$. Ответ: (а) $\sin t - 2/\pi$ если $\mu \notin \{-\frac{1}{2}, 1\}$, $C\cos t + \sin t - 2/\pi$ если $\mu = -1/2$, $C\pi \cos\frac{t}{3} + (C+1)\sin t - 2/\pi$ если $\mu = 1$; (б) $\frac{15\mu t^2 - 9\mu + 9}{(3-5\mu)(3+2\mu)}$ если $\mu \notin \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\}$, нет решений, если $\mu \in \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\}$.

Индивидуальное задание № 10: решите уравнение Фредгольма $x(t) = 2\int_0^1 K(t,s)x(s)ds + sh\, t$, *где* $K(t,s) = e^{-s} \cdot \operatorname{sh} t$, если $t \le s$ *и* $K(t,s) = e^{-t} \cdot \operatorname{sh} s$ если $s \le t$. Ответ: $e \sin t/(\sin 1 + \cos 1)$.

Индивидуальное задание № 11: применяя формулы Гильберта-Шмидта, решите уравнение Фредгольма $x(t) = \mu \int_0^{\pi/2} \min\{t,s\}\, x(s)ds + \sin 3t$, где $\mu \in \{1, 4, 9\}$. Ответ: $\frac{9}{8}\sin 3t + C\sin t$, $\frac{9}{5}\sin 3t$, нет решений соответственно.

Индивидуальное задание № 12: решите уравнение Вольтерры $x(t) = -2\int_0^t e^{t-s}\, x(s)ds + \sin t$. Ответ: $x(t) = \cos t - e^{-t}$.

Индивидуальное задание считается решеным, если в результате решения задачи получен правильный ответ.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов (первый – из общей теории линейных нормированных пространств, второй – из теории гильбертовых пространств) и одной задачи. Теоретические вопросы проверяют РООПК 1.1 и 1.2. Задача проверяет РООПК 1.3.

Перечень теоретических вопросов:

1. Линейные нормированные пространства. Определения. Свойства нормы.
2. Подпространства в ЛНП.
3. Примеры ЛНП. Полнота пространств $M(\Gamma)$ и $C(K)$.
4. Примеры ЛНП. Полнота пространства c_0.
5. Примеры ЛНП. Неполнота пространства c_{00}.
6. Линейные ограниченные операторы. Критерии ограниченности.
7. Примеры линейных ограниченных операторов. Операторы Фредгольма и Вольтерры. Неограниченные операторы.
8. Пространство линейных ограниченных операторов $L(E,F)$. Его полнота.
9. Изоморфизмы и изометрии. Изоморфизм конечномерных пространств.
10. Линейные ограниченные функционалы. Сопряженное пространство.
11. Теоремы Хана-Банаха. Следствия.
12. Теорема Банаха-Штейнгауза.
13. Теорема Банаха об обратном операторе. Произведение ЛНП. График отображения, его свойства. Теорема о замкнутом графике.
14. Относительно компактные множества. Вполне непрерывные операторы. Теорема о сумме вполне непрерывных операторов и об умножении вполне непрерывного оператора на скаляр.
15. Относительно компактные множества. Вполне непрерывные операторы. Теорема о композиции вполне непрерывных операторов.

16. Относительно компактные множества. ε-сети и теорема Хаусдорфа. Теорема о пределе последовательности вполне непрерывных операторов.
17. Корректность и вполне непрерывность оператора Фредгольма на пространстве $C[a,b]$.
18. Скалярное произведение. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши--Буняковского.
19. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Примеры гильбертовых пространств.
20. Теорема о перпендикуляре к произвольному подмножеству. Теорема Пифагора и следствие из нее.
21. Теорема о наилучшем приближении.
22. Теорема о проекции и следствия из нее.
23. Общий вид функционала в гильбертовом пространстве.
24. Ортонормированные и полные системы в гильбертовом пространстве. Теорема Шмидта об ортогонализации.
25. Базисы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя.
26. Замкнутые системы и равенство Парсеваля. Критерий замкнутости для ортонормированных систем.
27. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Теорема о существовании сопряженного оператора.
28. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Примеры и свойства сопряженных операторов.
29. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и их свойства. Примеры самосопряженных операторов.
30. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве и их свойства. Вполне непрерывность сопряженного оператора.
31. Спектр линейного непрерывного оператора. Классификация точек спектра.
32. Связь между спектром оператора и его сопряженного в гильбертовом пространстве.
33. Связь между остаточным спектром оператора и точечным спектром его сопряженного в гильбертовом пространстве.
34. Связь между точечным спектром оператора и остаточным и точечным спектром его сопряженного в гильбертовом пространстве.
35. Спектр самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
36. Спектр вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.
37. Уравнения Риса-Шаудера и уравнения Фредгольма. Лемма об инъективности, сюрьективности и биективности оператора $\lambda I - T$.
38. Уравнения Риса-Шаудера и уравнения Фредгольма. Первая теорема Фредгольма. Единственность решения уравнения Риса-Шаудера.
39. Уравнения Риса-Шаудера и уравнения Фредгольма. Третья теорема Фредгольма.
40. Теорема Гильберта-Шмидта.
41. Первая формула Гильберта-Шмидта.
42. Вторая формула Гильберта-Шмидта.
43. Теорема о неподвижной точке и ее применение к решению уравнений Риса-Шаудера.
44. Обобщенная теорема о неподвижной точке и ее применение к решению уравнений Вольтерры.

Примеры задач:

1. Сходится ли последовательность функций $\{x_n(t) = e^{-nt}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_1(0,1)$? Если сходится, то найдите предельную функцию.
2. Сходится ли последовательность функций $\left\{x_n(t) = n^2 e^{-n(t+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $C[0,1]$? Если сходится, то найдите предельную функцию.
3. Решите уравнение Фредгольма $x(t) = \mu \int_{-1}^{1} (t^2 + s^3) x(s) ds + t$.

4. Пусть $T: l_2 \to l_2$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, \dots, 0, x_{100}, 0,0,0, \dots)$. Найдите T^*.
5. Найдите скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ элементов $x = \left\{\frac{i}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $y = \left\{\frac{(-i)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве l_2.
6. Найдите все собственные векторы оператора $T: L_2(-1;1) \to L_2(-1;1)$, заданного формулой $Tx(t) = \int_{-1}^{1}(3ts + 5t^2s^2)x(s)ds$.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Студент имеет право проходить промежуточную аттестацию вне зависимости от результатов текущей успеваемости, но необходимым условием получения оценки не ниже «удовлетворительно» является наличие всех правильно решенных индивидуальных домашних заданий.

Сама оценка за экзамен складывается из баллов за теоретические вопросы (от 0 до 2 баллов) и баллов за задачу (от 0 до 1 балла).

Сумма баллов	Оценка
5	Отлично
4	Хорошо
3	Удовлетворительно
2	Неудовлетворительно
1	Неудовлетворительно
0	Неудовлетворительно

Баллы за теоретический вопрос	Критерии соответствия
2	студент ответил на вопрос без принципиальных ошибок и существенных пробелов в доказательствах и рассуждениях
1	в целом дан правильный ответ на вопрос, но доказательства содержат неточности или не полностью изложены
0	ответ отсутствует или представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения

Баллы за задачу	Критерии соответствия
1	Задача решена верно с первой попытки или со второй попытки (после замечаний экзаменатора)
0	Задача решена неверно ни с первой, ни со второй попытки

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний могут быть использованы для формирования программы ГИА (программы государственного экзамена), а также экспертом Рособрнадзора при проведении проверки диагностической работы по оценки уровня форсированности компетенций обучающихся (при контрольно-надзорной проверке). Вопросы данного раздела показывают вклад дисциплины в образовательный результат образовательной программы. Объем заданий в данном разделе зависит как от количества формируемых индикаторов достижения компетенций, так и от объема дисциплины по учебному плану.

Тест (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3). При проведении теста можно пользоваться источниками из списка учебной литературы в РПД.

1. Определите, какому из множеств принадлежит данная числовая последовательность.

1)	$\left\{n\, e^{\frac{1}{n}} - n\right\}_{n=1}^{\infty}$	а)	$m \setminus c$
2)	$\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$	б)	$c \setminus c_0$
3)	$\{(n+1)^{-2}\}_{n=1}^{\infty}$	в)	$c_0 \setminus l_2$
4)	$\left\{\arcsin\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$	г)	$l_2 \setminus l_1$
5)	$\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$	д)	l_1

1	2	3	4	5
б	а	д	г	в

2. Найдите расстояние между точками x и y в пространстве $C[-2,2]$, если

$$x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{при } t<0; \\ 2t+1 & \text{при } t \ge 0; \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 3-t & \text{при } |t| \le 1; \\ t+1 & \text{при } t>1; \\ 2t+6 & \text{при } t<-1. \end{cases}$$

1) 2.
2) 3.
3) 4.
4) 5.
5) 6.

3. Найдите расстояние между точками x и y в пространстве $C[0,1]$, если $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{2t}$.

1) 2.
2) $e^2 - e$.
3) 4.
4) $\ln 4$.
5) $e^2 + e$.

4. Найдите норму элемента $x = \cos t$ в пространстве $L_1(0,\pi)$.

1) 0.
2) 2.
3) 1.
4) Ни один из предложенных выше ответов.

5. Укажите пределы данных последовательностей функций $\phi_n\colon [-1,\ 1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1,1]$

1)	$\phi_n(t) = t\cos^2\frac{t}{n}$	а)	$h(t) \equiv 1$

2)	$\phi_n(t) \;\; = nt \;\; sh \;\; \frac{t}{n}$	б)	$h(t) = t$
3)	$\phi_n(t) \;\; = \ln \;\; e - n2^{-n}t$	в)	$h(t) = t^2$

1	2	3
б	в	а

6. Сопряжённым к данному оператору, $T: l_2 \to l_2$, $\;\; T\big((x_1\,,\; x_2\,,\; \dots x_n\,,\; \dots)\big) = (0\,,\; 0\,,\; x_1\,,\; x_2\,,\; \dots x_n\,,\; \dots)$, является оператор

1) $S \;\; y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \;\; = \; 0, 0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$
2) $S \;\; y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \;\; = \; 0, 0, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots$
3) $S \;\; y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \;\; = \; y_3, y_4, \dots, y_n, \dots$
4) $S \;\; y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \;\; = \; \overline{y_3}, \overline{y_4}, \dots, \overline{y_n}, \dots$

7. Найдите скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ векторов $x = (i, -1, 3+i, 3)$ и $y = (i, -2, -i, i)$ в пространстве $\mathbb{C}^4$.

1) 4.
2) $6i$.
3) 0.
4) Ни один из предложенных выше ответов.

8. Найдите скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ векторов $x = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $y = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве ℓ_2.

1) $-1/5$.
2) 0.
3) $1/3$.
4) Ни один из предложенных выше ответов.

9. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:

1) $x, y \in \mathbb{C}^4$. $\;\; x = (1,\; i,\; -1,\; 4)$, $\;\; y = (i,\; 1,\; 2,\; \frac{1}{2})$.
2) $x, y \in \ell_2$. $\;\; x = \left\{\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\;\; y = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
3) $x, y \in L_2(0, \pi)$. $\;\; x(t) = \cos t - i \sin t$, $\;\; y(t) = \cos t + i \sin t$.

10. Отметьте все собственные векторы оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T \;\; x_1, x_2, x_3, x_4 \;\; = \;\; x_4, x_1, x_2, x_3 \;\;$.

1) $(-2, 2, -2, 2)$.
2) $(1, 0, 1, 0)$.
3) $(1, -1, 2, -2)$.
4) $(1, i, -1, -i)$.
5) $(1, i, 1, i)$.

Информация о разработчиках

Гензе Леонид Владимирович, к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа и теории функций