Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Математические методы и модели для компьютерных наук

по направлению подготовки

01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Информационная безопасность

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
А.Ю. Матросова

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-3.1 Разрабатывает математические модели в области прикладной математики и информатики.

ИОПК-3.2 Анализирует математические модели для решения прикладных задач профессиональной деятельности.

ИОПК-3.3 Разрабатывает и анализирует новые математические модели для решения прикладных задач профессиональной деятельности в области прикладной математики и информатики.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- задачи;
- индивидуальные задания;
- задания на разработку программ;
- задания для проектной работы.

Задачи (ИОПК-3.1, ИОПК-3.2)

Семинар 1. Доказательства

1.1. Рассмотрим доказательство:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = i^2 = -1$$

(a) Найти ошибки в доказательстве

(b) Доказать (без ошибок), что, если $1 = -1$, то $2 = 1$.

1.2.

Найти ошибки в доказательстве.

1. Пусть a и b равны и отличны от нуля: $a = b$
2. Умножим на a: $a^2 = ab$
3. Вычтем b^2: $a^2 - b^2 = ab - b^2$
4. Разложим обе части на множители: левая часть – разность квадратов, в правой вынесем b за скобки, как общий множитель: $(a - b)(a + b) = (a - b)b$
5. Разделим на $(a - b)$: $(a + b) = b$
6. Учтем, что $a = b$: $2a = a$.
7. Поделим на число, не равное нулю: $2 = 1$.
8.

1.5.

Показать, что $\log_7 n$ есть либо целое, либо иррациональное число, если n – положительное целое число. Можно использовать любые известные факты о целых или простых числах.

1.6.

Если возвести иррациональное число в иррациональную степень, можно ли получить в результате рациональное число? Показать, что это возможно, с помощью перебора всех случаев, рассмотрев число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

1.7.

Покажите от противного, что если $ab = n$, то и или a, или b должно быть $\leq \sqrt{n}$, где a, b, n есть неотрицательные вещественные числа.

1.9. Используя принцип вполне упорядочивания, доказать:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.10. Используя принцип вполне упорядочивания, показать, что уравнение не имеет решений в целых положительных числах:

$$4a^3 + 2b^3 = c^3.$$

1.11.

Какие из приведенных множеств имеют минимальный элемент, и какие являются вполне упорядоченными? Для тех, которые не являются вполне упорядоченными, укажите подмножество, не имеющее минимального элемента.

(a) Целые числа $\geq -\sqrt{2}$.

(b) Рациональные числа $\geq \sqrt{2}$.

(c) Рациональные дроби вида $1/n$, где n – целое положительное число.

(d) Множество G рациональных чисел вида m/n , где $m;\ n\ >\ 0$ и $n \leq g$, $g = 10^{100}$.

(e) Множество F дробей вида $n/(n+1)$: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right\}$.

1.12.

С помощью индукции по n доказать, что для любых $n \in \mathbb{N}, r \neq 1$

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

1.13.

Числа Фибоначчи $F\ (0); F\ (1); F\ (2); \dots$ имеют вид:

$$F(0) = 0$$
$$F(1) = 1$$
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), n \geq 2$$

То есть, первые несколько чисел равны 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, и 21. Доказать по индукции, что для всех $n \geq 1$:

$$F(n-1)F(n+1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n$$

Доказать, используя обобщённую индукцию:

$$F(n) = \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}}, \qquad p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

1.15.

На доске написаны два числа 1, 1. Вписав между числами их сумму, мы получим числа 1, 2, 1. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа 1, 3, 2, 3, 1. После трёх операций будут числа 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?

1.16.

Вы начинаете со стопки из n коробок. Затем вы делаете последовательность ходов. На каждом ходу вы делите одну стопку ящиков на две непустые стопки. Игра заканчивается, когда у вас есть n стопок, каждая из которых содержит одну коробку.

Вы зарабатываете баллы за каждый ход: если вы разделите одну стопку высотой $a+b$ на две стопки высотой a и b, то за этот ход вы получаете баллы ab.

Ваш общий балл – это сумма очков, которые вы зарабатываете за каждый ход. Какую стратегию вы должны использовать, чтобы максимизировать свой общий балл?

Семинар 2. Логика высказываний

2.1.

В вашем курсе есть учебник и выпускной экзамен. Пусть P, Q и R — следующие высказывания:

P = Вы получили пятёрку на выпускном экзамене.

Q = Вы выполнили все упражнения из книги.

R = Вы получили пятёрку за курс.

Переведите следующие утверждения в пропозициональные формулы, используя P, Q, R и пропозициональные связки AND; NOT; IMPLIES.

(а) Вы получили пятёрку за курс, но не выполнили все упражнения из книги.

(б) Вы получили пятёрку за экзамен, выполнили все упражнения из учебника и получили пятёрку на уроке.

(с) Чтобы получить пятерку за курс, вам необходимо получить пятерку на выпускном экзамене.

(г) Вы получили пятёрку за экзамен, но не выполнили все упражнения из книги; тем не менее, вы получите пятерку за курс.

2.2.

Булева логика возникает при проектировании цифровых схем с использованием соглашения, согласно которому T соответствует 1, а F - 0. Простым примером является 2-битная схема полусумматора. Эта схема имеет 3 двоичных входа,a_0;a_1 и b, и 3 двоичных выхода, c; s_0; s_0. 2-битное слово a_1a_0 есть двоичное представление целого числа, k, от 0 до 3. 3-битное слово cs_1s_0 есть двоичное представление $k+b$. Третий выходной бит, c, есть *бит переноса*.

Так, если $k = 1$ и $b = 1$, то $a_1a_0 = 01$, и $cs_1s_0 = 010$, то есть, 3-битное представление суммы $1 + 1$.

Фактически, последний бит переноса равен 1 только тогда, когда все три двоичных входа равны 1, то есть когда $k = 3$ и $b = 1$. В этом случае $cs_1s_0 = 100$, то есть, двоичное представление $3 + 1$.

Этот 2-битный полусумматор можно описать следующими формулами:

$c_0\ =\ b$;

$s_0 = a_0\ XOR\ c_0$;

$c_1 = a_0\ AND\ c_0$(перенос в разряд 1);

$s_1 = a_1\ XOR\ c_1$;

$c_2 = a_1\ AND\ c_1$(перенос в разряд 2);

$c = c_2$:

(а) Обобщите приведенную выше конструкцию 2-битного полусумматора на $n > 1$ битный полусумматор с входами a_n;…;a_1; a_0 и b и выходами c; s_n;…;s_1; s_0. то есть, выведите простые формулы для s_i и c_i, $0 \leq\ i \leq n + 1$, где c_i есть перенос в разряде $i + 1$, и $c = c_{n+1}$.

(b) Напишите аналогичные определения для цифр и переносов в сумме двух $n + 1$-битных двоичных чисел a_n;…;a_1; a_0 и b_n;…;b_1; b_0. Вышеупомянутые сумматоры, представленные в виде цифровых схем, состоят из последовательности одноразрядных полусумматоров или сумматоров, соединенных последовательно. Эти схемы имитируют обычное сложение «в столбик», где перенос в столбец вычисляется непосредственно из переноса в предыдущий столбец, и переносы должны пройти через все столбцы, прежде чем будет определен перенос в последний столбец. Схемы такой конструкции называются каскадными сумматорами. Они просты для понимания и запоминания и требуют практически минимального количества операций, но выходным битам высокого порядка и окончательному переносу требуется время, пропорциональное n, чтобы достичь своих конечных значений.

(c) Сколько операций использует ваш сумматор из части (b) для вычисления суммы?

2.4.

(a) Покажите, что формула выполнима:

(P IMPLIES Q) OR (Q IMPLIES P)

(b) Пусть P и Q — пропозициональные формулы. Опишите одну формулу R, используя только операторы «AND», «OR», «NOT» и копии P и Q, так что R действительна тогда и только тогда, когда P и Q эквивалентны.

(c) Набор пропозициональных формул P1;:::;Pk непротиворечив тогда и только тогда, когда все они могут быть истинными одновременно. Напишите формулу S, чтобы набор P1;:::;Pk был непротиворечивым тогда и только тогда, когда S выполнима.

2.5.

Проверьте эквивалентность формул несколькими способами.

$$\big(x \oplus (y \to z)\big) = \big((x \oplus y) \to (x \oplus z)\big)$$
$$\big(x \equiv (y \to z)\big) = \big((x \equiv y) \to (x \equiv z)\big)$$

Семинар 3. Предикаты

3.1.

Для каждого из следующих высказываний:

1. $\forall x. \exists y. 2x - y = 0.$
2. $\forall x. \exists y. x - 2y = 0.$
3. $\forall x. (x < 10) \to \big(\forall y. (y < x) \to (y < 9)\big).$
4. $\forall x. \exists y. [(y > x) \& (\exists z. y + z = 100)].$

определить, верны ли они, когда переменные:

(а) неотрицательные целые числа;

(б) целые числа;

(в) действительные числа.

3.2.

Пусть $Q(x, y)$ утверждение «x был участником телешоу y». Область определения для x — это набор всех учеников вашей школы, а для y — это набор всех викторин, которые когда-либо транслировались по телевидению. Определите, является ли каждое из следующих выражений логически эквивалентным предложению: «Ни один ученик вашей школы никогда не участвовал в телевизионной викторине».

1. $\forall x. \forall y. \overline{Q(x, y)}.$
2. $\exists x. \exists y. \overline{Q(x, y)}.$
3. $\overline{\forall x. \forall y. Q(x, y)}.$
4. $\overline{\exists x. \exists y. Q(x, y)}.$

3.3. Какие высказывания истинны?

(a) $\exists x. \exists y. P\,(x;\ y) \to\ \exists y. \exists x. P(x;\ y)$

(b) $\forall x.\exists y.Q(x;\ y) \rightarrow\ \exists y.\forall x.Q(x;\ y)$
(c) $\exists x.\forall y.R(x;\ y) \rightarrow\ \forall y.\exists x.R(x;\ y)$
(d) $\left(\overline{\exists x\, S(x)}\right) \equiv\ \forall x.NOT(S(x))$

3.4. Какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов? Выделите свободные и связанные переменные.

1. $\overline{\forall x.\exists z.(P(x,y) \rightarrow P(y,z))}$
2. $R(x)\&(\forall x.F(x))$
3. $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv (\exists x.P(x) \rightarrow \forall x.P(x,y))$

3.5. Равносильны ли формулы:

1. $F1\ =\ (\exists x)(\forall y)(F(x)\ \&\ G(y))$ и $F2\ =\ (\forall y)(\exists x)(F(x)\ \&G(y))$;
2. $F1\ =\ (\exists x)(\forall y)(F(x) \rightarrow\ G(y))$ и $F2\ =\ (\forall y)(\exists x)(F(x) \rightarrow\ G(y))$.

3.6. Показать, что следующее рассуждение нелогично: Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, у некоторых млекопитающих есть перья.

3.7. Показать, что следующее рассуждение нелогично: Никто не поймет этого сообщения, если кто-нибудь не разгадает кода. Значит, никто не сможет понять это сообщение.

3.8. Приведите отрицания следующих формул:

1. $\exists x.(A(x)\&B(x)\&C(x))$
2. $\forall x.(A(x) \rightarrow \forall y.B(y))$
3. $\forall x.(A(x) \vee \exists y.B(y))$

Семинар 4. Множества, последовательности, бинарные отношения

4.1. Доказать, что $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$.
4.2. Доказать, что $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$.
4.3. Доказать, что:

$$Pow(A \cap B) = Pow(A) \cap Pow(B);$$
$$Pow(A \cup B) \subseteq Pow(A) \cup Pow(B).$$

4.4. Пусть A, B, C, D – непустые множества. Доказать, что:

$$(A \subseteq B)\ AND\ (C \subseteq D) \Longrightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D);$$
$$(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

4.5. Какими свойствами обладает отношение $xRy\colon x^2 + x = y^2 + y$, определенное на множестве действительных чисел (рефлексивность, симметричность, транзитивность)?

4.6. Какие функции являются инъекциями, сюръекциями, биекциями:

$$f_1(x) = e^x;$$
$$f_2(x) = x^3 - x;$$
$$f_3(x) = 2x + 1;$$
$$f_4(x) = x^2.$$

4.7. Какие отношения являются отношениями эквивалентности или порядка (строгого или нестрогого, линейного или частичного):

$$xRy\colon x\ mod\ 3 = y\ mod\ 3;\ x, y \in \mathbb{N};$$
$$xRy\colon x\ mod\ 3 < y\ mod\ 3;\ x, y \in \mathbb{N};$$
$$xRy\colon x\ mod\ y = 0;\ x, y \in \mathbb{N}.$$

Индивидуальные задания (ИОПК-3.1, ИОПК-3.2)

ИДЗ 2. Высказывания, булевы функции, предикаты.

2.1.

Решить задачу с помощью таблиц истинности, перебором всех случаев, преобразованием формул в нормальную форму. Браун, Джонс и Смит обвиняются в подделке сведений о подлежащих налоговому обложению доходах. Они дают под присягой такие показания: *Браун*. Джонс виновен, а Смит невиновен.

Джонс. Если Браун виновен, то виновен и Смит.

Смит. Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

а) Совместимы ли показания всех троих заподозренных?

б) Показания одного из обвиняемых следуют из показаний другого; о чьих показаниях идет речь?

в) Если все три невиновны, то кто совершил лжесвидетельство?

г) Предполагая, что показания всех обвиняемых верны, указать, кто виновен, а кто невиновен.

д) Если невиновный говорит правду, а виновный лжет, то кто виновен, а кто невиновен?

2.2.

Построить таблицу истинности для функции $(x \to \overline{y}z) \equiv (y \vee (z \to x))$.

2.3.

Привести формулу из задания 2 к дизъюнктивной нормальной форме.

2.4.

Проверить эквивалентность формул $x \to (y \equiv z)$ и $(x \to y) \equiv (x \to z)$ двумя способами.

2.5.

Показать, что для любой формулы над множеством функций $\{\to, \wedge, \vee, \overline{\ }\}$ можно найти эквивалентную формулу, содержащую только $\{\vee, \overline{\ }\}$. Привести пример.

2.6.

Изобразить геометрическое место точек $P(p; q)$, для которых:

(a)$\forall x.\ x^2 + px + q > 0$;

(b)$\exists x.\ x^2 + px + q > 0$.

2.7.

Для каждого высказывания:

(1) $\forall x.\ \exists y.\ 2x - y = 0$;

(2) $\forall x.\ \exists y.\ x - 2y = 0$;

(3) $\forall x.\ (x < 10) \to (\forall y.\ (y < x) \to (y < 9))$;

(4) $\forall x.\ \exists y.[(y > x) \wedge (\exists z.\ y + z = 100)]$;

Определить, являются ли они истинными, для следующих областей определения переменных:

(a) неотрицательные целые числа;

(b) целые числа;

(c) действительные числа

ИДЗ 3. Теория графов

Дана матрица смежности взвешенного орграфа. Решить следующие задачи:

1. Нарисовать диаграмму орграфа.
2. Построить матрицу кратчайших путей, используя волновой алгоритм.
3. Определить, является ли орграф сильно, односторонне или слабо связным. Построить фактор-граф.
4. Найти диаметр, радиус и центры соответствующего невзвешенного орграфа.
5. Найти минимальные пути от центра до всех вершин алгоритмом Дейкстры.

6. Построить кратчайшее остовное дерево соответствующего неориентированного графа. 7. Определить, является ли неориентированный граф эйлеровым (полуэйлеровым). Если да, найти эйлеров цикл (цепь).

8. Построить в неориентированном графе гамильтонов цикл (цепь) или показать, что это невозможно.

9. Уложить неориентированный граф без кратных ребер на плоскости, либо показать, что это невозможно.

10. Найти оптимальную раскраску неориентированного графа.

ИДЗ 4. Формальные грамматики и языки

4.1.

Построить формальную грамматику, описывающую палиндромы четной длины из символов $\{0,1\}$. Выполнить восходящий анализ слова 00111100.

4.2.

Привести формальную грамматику к грамматике класса 3 с $T = \{X, Y, Z, 1, \oplus\}$ и построить по ней конечный автомат.

- < Полином >→< Конъюнкция >
- Полином >→< Полином >⊕< Конъюнкция >
- Конъюнкция >→ 1
- Конъюнкция >→ x
- Конъюнкция >→ y
- Конъюнкция >→ z
- Конъюнкция >→ xy
- Конъюнкция >→ xz
- Конъюнкция >→ yz
- Конъюнкция >→ xyz

Допускает ли автомат строки: «$x \oplus xyz \oplus 1$», «$xx \oplus xyz \oplus y$»?

4.3.

Построить конечный автомат, допускающий шестнадцатеричные целые константы языка С.

4.4.

Построить конечный автомат, распознающий язык, задаваемый регулярным выражением $0^*(1 + 01 + 10)1^*0$. Какие слова включает этот язык?

4.5.

Эквивалентны ли регулярные выражения $(11 + 0)(11)^*01$ и $(11)^*01 + 01(11)^*01$.

4.6.

Построить магазинный автомат, вычисляющий суперпозицию функций $M(X, Y)$ – максимум из X и Y, $m(X, Y)$ – минимум из X и Y, X и Y – числа 0 и 1.

Пример: $M(0, m(1,0)) = 0$.

4.7.

Построить КС-грамматику для языка

$\{wu\colon w\ \{0,1\} *, u \text{ получается, если прочесть } w \text{ справа налево и инвертировать}\}$.

Задания на программирование (ИОПК-3.1, ИОПК-3.2, ИОПК-3.3)

ИДЗ 1. Доказательство правильности алгоритмов.

Задание: изложить алгоритм, доказать, что он решает поставленную задачу. Реализовать алгоритм на любом языке программирования.

1. Алгоритм Штрассена умножения матриц.
2. Решение систем линейных уравнений алгоритмом Гаусса через UL-разложение.
3. Поиск обратной матрицы через UL-разложение.

4. Бинарное возведение в степень.
5. Алгоритм умножения полиномов и длинных чисел Карацубы.
6. Матричное вычисление чисел Фибоначчи.
7. Быстрое преобразование Фурье и его применение для умножения полиномов и длинных чисел.
8. Алгоритм Краскала построения кратчайшего остова в графе.
9. Алгоритм Прима построения кратчайшего остова в графе.
10. Алгоритм Форда-Беллмана поиска минимальных путей от заданной вершины графа до остальных.
11. Алгоритм Флойда-Уоршалла поиска всех минимальных путей в графе.
12. Вычисление значения полинома по схеме Горнера.
13. Вычисление значения полинома по схеме Тодта.
14. Построение эйлерова цикла в графе.
15. Вычисление $x^n \ mod \ m$.
16. Полиномиальный алгоритм проверки числа на простоту.
17. Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта поиска подстроки в строке.
18. Алгоритм Бойера-Мура поиска подстроки в строке.
19. Алгоритм вычисления расстояния Левенштейна.
20. Алгоритм на ваш выбор.

ИДЗ 2. Основные дискретные структуры.

Разработать программу для решения одной из задач. Решения в виде полного перебора вариантов оцениваются ниже.

1. Проверка выполнимости КНФ.

Дана КНФ в виде набора конъюнкций, заданных троичными векторами. Проверить, принимает ли она значение ИСТИНА. Программа должна работать с числом переменных не менее 10.

2. Поиск корня системы булевых уравнений.

Дана система ДНФ (КНФ) в виде множеств троичных векторов, найти любой из корней системы. Программа должна работать с числом переменных не менее 5 и с числом уравнений не менее 3.

3. Построение приближенной кратчайшей ДНФ булевой функции, заданной таблицей истинности.

Задан столбец значений булевой функции, построить ее приближенную кратчайшую ДНФ. Программа должна работать с числом переменных не менее 7.

4. Построение безызбыточной ДНФ булевой функции.

Задан столбец значений булевой функции, построить ее безызбыточную ДНФ. Программа должна работать с числом переменных не менее 7.

5. Построение BDD-графа булевой функции, выбор оптимального порядка вершин.

Построить BDD-граф булевой функции, заданной столбцом значений. Оптимизировать порядок выбора переменных разложения. Программа должна работать с числом переменных не менее 7.

6. Выявление и удаление фиктивных переменных полной булевой функции.

Найти и удалить фиктивные переменные полной булевой функции, заданной столбцом значений. Программа должна работать с числом переменных не менее 10.

7. Выявление и удаление фиктивных переменных частичной булевой функции.

Найти и удалить фиктивные переменные частичной булевой функции, заданной столбцом значений. Программа должна работать с числом переменных не менее 10.

8. Построение сокращенной ДНФ частичной булевой функции.

Задан столбец значений булевой функции, построить ее сокращенную ДНФ. Программа должна работать с числом переменных не менее 7.

9. Работа с множествами.

Реализовать построение множеств с помощью предикатов принадлежности и операции над множествами на основе побитовых операций, если множество задано последовательностью бит. Число элементов множества до 2^{16}.

ИДЗ 4. Формальные грамматики и языки

4.1. Разбор регулярных выражений.

Записать формальную грамматику, порождающую корректные регулярные выражения над $\{0,1\}$. Построить магазинный автомат, распознающий эти выражения. Разработать программу для разбора таких выражений.

4.2. Регулярные языки.

Разработать программу, которая по данному регулярному выражению строит конечный автомат, распознающий соответствующий регулярный язык, и осуществляет проверку строк на принадлежность этому языку. Для упрощения можно ввести ограничения на вложенность скобок.

4.3. Разбор арифметических выражений.

Записать формальную грамматику, порождающую корректные арифметические выражения любого языка программирования, включающие идентификаторы и целые константы. Построить магазинный автомат, распознающий эти выражения. Разработать программу для разбора таких выражений.

4.4. Разбор логических выражений.

Записать формальную грамматику, порождающую корректные логические выражения любого языка программирования, включающие идентификаторы и целые константы. Построить магазинный автомат, распознающий эти выражения. Разработать программу для разбора таких выражений.

ИДЗ 5.
Дискретные вероятностные структуры.

5.1. 2-SAT

Разработать программу для решения задачи 2-SAT с помощью случайного блуждания. Задача заключается в следующем: Дана конъюнктивная нормальная форма, каждая дизъюнкция которой содержит два слагаемых. Существует ли набор значения переменных, на котором функция, заданная этой формулой, принимает значение 1? Статистически оценить вычислительную сложность алгоритма (количество операций в зависимости от числа переменных и дизъюнкций).

5.2. Совершенное паросочетание

Разработать программу, которая строит совершенное паросочетание в графе на основе случайного блуждания. Статистически оценить вычислительную сложность алгоритма (количество операций в зависимости от числа вершин и ребер).

5.3. Обход графа

Разработать программу, которая посещает все вершины графа на основе случайного блуждания. Статистически оценить вычислительную сложность алгоритма (количество операций в зависимости от числа вершин и ребер).

Теория для заданий 1-3: https://www.youtube.com/watch?v=JsFH7t_X5c8

5.4. Василий и бар. Разработать программу для решения данной задачи для произвольной карты города. Статистически оценить вероятность того, что Василий доберется до бара, сравнить с теоретическим результатом. https://elementy.ru/problems/1033/Sluchaynye_bluzhdaniya

5.5. Модель Erdos–Renyi

Разработать программу генерации случайного графа по модели Erdos–Renyi (либо воспользоваться готовым решением https://en.wikipedia.org/wiki/Igraph). Сгенерировать 100 графов с числом вершин $n = 100$, $p = c \ln n / n$, $c > 1$, и оценить следующие величины в зависимости от c:

a) Доля связных графов.

b) Наибольшая степень вершины.

c) Диаметр и радиус связной компоненты.

5.6. Модели случайных графов

Используя три модели случайных графов (Erdos–Renyi, Barabasi-Albert, Chung-Lu), оцените вероятность: граф с $n = (10, 20)$ вершинами и $m = (10, 20)$ ребер имеет треугольник. Сравните результаты с аналитическим решением и заполните таблицу

Задание на проектную работу (ИОПК-3.1, ИОПК-3.2, ИОПК-3.3)

Город Z состоит из 25 районов, соединенных улицами с односторонним или двусторонним движением. На карте районы представлены кругами, в которых записано название района (буква A – Y) и коэффициент k, пропорциональный числу жителей района. Улицы представлены линиями, для каждой улицы известно время t проезда по ней. В задание входят:

1. Формальная постановка задачи.
2. Разработка алгоритма решения задачи.
3. Оценка его качества и вычислительной сложности.
4. Написание программы, реализующей алгоритм.
5. Проверка работы алгоритма на примере.
6. Подготовка презентации и выступление с докладом.

Работа может выполняться в группах не более четырех человек. Исходные данные к программе представляются в виде файла следующего вида. Первая строка содержит константы, приведенные в конкретном задании. Вторая строка содержит числа p и q, где p – число вершин, q – число ребер. Затем идет p строк вида A k, A – обозначение вершины, k – ее вес. Затем идет q строк вида A B t f, A – начало ребра, B – конец ребра, t – вес ребра, f равно 1, если ребро ориентированное, и 0 – если нет.

Задание 1. Полицейский патруль, объезжая город, должен как минимум один раз проехать по каждой улице и как минимум k раз посетить каждый район. Составьте маршрут патруля, при котором на объезд города тратится наименьшее время. Результат работы алгоритма – маршрут и время проезда по нему.

Задание 2. Требуется расположить в городе m полицейских участков таким образом, чтобы в среднем поездка на вызов занимала минимальное время. При этом на вызов всегда выезжает машина из ближайшего участка, и частота вызовов в район пропорциональна числу жителей района. Результат работы алгоритма – номера районов, где расположены участки, информация, откуда выезжает машина в каждый район, и сколько времени проходит между вызовом и прибытием машину на место.

Задание 3. Городские службы имеют в своем распоряжении N грузовиков для сбора мусора. Ежедневно требуется забирать мусор из каждого района, причем объем мусора в районе с коэффициентом k составляет k единиц. Район могут посетить как разные грузовики, так и один грузовик несколько раз. Каждый грузовик вмещает m единиц мусора. Когда грузовик заполнен, он возвращается в пункт сбора мусора, выгружает мусор и опять готов к выезду. Требуется расположить в городе минимальное число пунктов для сбора мусора, чтобы процесс сбора занимал время, не большее, чем T. Результат работы алгоритма – номера районов, где расположены пункты сбора мусора, количество грузовиков, приписанных каждому пункту, и маршруты грузовиков.

Критерии оценивания:

За каждое задание можно получить от 1 до 10 баллов, которые выставляются пропорционально количеству правильно выполненных заданий.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Рейтинг – план «Математические модели компьютерных наук»

№	Задание	Баллы
1	Задание 1. Обоснование алгоритмов	10
2	Задание 2. Операции с основными дискретными структурами.	10
3	Задание 3. Теория графов	10
4	Задание 4. Теория формальных грамматик	10
5	Задание 5. Вероятностные структуры	10
5	Семинар 1. Доказательства	5
6	Семинар 2. Алгебра логики	5
7	Семинар 3. Предикаты	5
8	Семинар 4. Множества и бинарные отношения	5
9	Экзамен	30
	Итого	**100**

Баллы и оценки

Баллы	**Оценка**
0-39	неудовлетворительно
40-59	удовлетворительно
60-79	хорошо
80-100	отлично

Вопросы к экзамену.

1. Принцип доказательства «от противного».
2. Доказательство по принципу вполне упорядоченности.
3. Доказательства по методу математической индукции.
4. Мощности конечных и бесконечных множеств.
5. Наивная и аксиоматическая теория множеств.
6. Отношения эквивалентности и порядка.
7. Инъективные, сюръективные и биективные функции.
8. Графы и способы их задания.
9. Задачи поиска путей.
10. Эйлеровы графы и задача почтальона.
11. Гамильтоновы графы и задача коммивояжера.
12. Задача поиска потока в сети.
13. Задача о раскраске.

14. Задача о кратчайшем остове.
15. Деревья и их свойства.
16. Классификация формальных грамматик.
17. Конечный автомат.
18. Магазинный автомат.
19. Машина Тьюринга.
20. Нормальный алгоритм Маркова.
21. Наибольший общий делитель.
22. Фундаметальная теорема арифметики.
23. Модулярная арифметика.
24. Сочетания, размещения и перестановки.
25. Оценка вычислительной сложности алгоритмов, O-нотация.
26. Основная теорема о рекуррентных соотношениях.
27. Случайное блуждание.
28. Случайное блуждание в графе.
29. Модели случайных графов.
30. Характеристики случайных графов

Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов, проверяет ИОПК-3.1, ИОПК-3.2. Баллы выставляются следующим образом: по 10 баллов за каждый теоретический вопрос, включая ответы на дополнительные вопросы по теме билета, и 10 баллов за ответы на дополнительные вопросы, не связанные с темой билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы аналогичны материалам текущего контроля.

Информация о разработчиках

Буркатовская Юлия Борисовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры САиММ ИПМКН ТГУ.