

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Пространства последовательностей и базисы

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023, 2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А. Крылов

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить аппарат функционального анализа, относящийся к исследованию свойств последовательностей в банаховых пространствах, таких как полнота, минимальность, базисность, переполненность.

– Научиться применять понятийный аппарат для исследования вопросов о сходимости рядов в банаховых пространствах, о дополняемости и изоморфности банаховых пространств, в частности пространств непрерывных функций, то есть для решения практических задач профессиональной деятельности математика-теоретика.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Второй семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Дополнительные главы функционального анализа.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплин

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Базисы в банаховых пространствах

1. Базисы Гамеля, базисы Шаудера Критерий Гринблума.

2. Полные, минимальные, переполненные системы элементов в банаховых пространствах. Биортогональные системы

3. Базисы в гильбертовом пространстве. Теорема Банаха о базисности биортогональной системы. Базисы Рисса. Бесселевы системы. Матрицы Грама.
4. Базисы в гильбертовом пространстве. Теорема Банаха о базисности биортогональной системы. Базисы Рисса. Бесселевы системы. Матрицы Грама
5. Универсальность пространства $C[0,1]$.
6. Слабые топологии в банаховых пространствах. Компактность, метризуемость.
7. Теорема Эберлейна-Шмульяна.

Тема 2. Пространства последовательностей.

1. Базисы в пространствах последовательностей. Блок-базисы.
2. Проекторы. Дополняемые подпространства в пространствах последовательностей.
3. Техника разложения Пелчинского. Изоморфизм пространств.
4. Пространство суммируемых последовательностей Π . Свойство Шура. Теорема Питта.
5. Инъективные пространства. Инъективность l_∞ . Недополняемость сепарабельных пространств в пространстве l_∞ .
6. Пространство c_0 . Дополняемость c_0 . Теорема Собчика.
7. Сходимость рядов в банаховых пространствах. Безусловная и слабо безусловная сходимость рядов.
8. Слабо компактные операторы в банаховых пространствах. Теоремы Пелчинского и Линденштрауса.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, вопросов по лекционному материалу, выполнения домашних индивидуальных заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен во втором семестре проводится в устной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть, проверяющая ИОПК 1.1, представляет собой теоретический вопрос по первой части курса «Базисы в банаховых пространствах». Ответ на вопрос предполагает полное доказательство теорем и ответы на дополнительные вопросы по этой теме.

Вторая часть содержит один вопрос, также проверяющий ИОПК 1.1, по второй части курса «Пространства последовательностей». Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИПК-1.1, и оформленных в виде практических задач. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Определение базиса. Критерий Гринблума.
2. Минимальность и полнота базиса. Пример полной минимальной системы, не являющейся базисом.
3. Существование базисной последовательности в банаховом пространстве.
4. Проекторы. Дополняемые пространства.
5. Блок базисы.

6. Схема разложения Пелчинского.
7. Пространство суммируемых последовательностей. Свойство Шура.
8. Пространство ограниченных последовательностей. Инъективность.
9. Пространство сходящихся последовательностей. Сепарабельная инъективность.
10. Теорема Эберлена-Шмульяна.
11. Универсальность пространства $C[0,1]$.
12. Метризуемость в пространствах, наделённых слабой топологией.
13. Слабая компактность и слабо-компактные операторы.
14. Абсолютная и условная сходимости рядов в банаховых пространствах

Примеры задач:

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и $C[0,1]$ соответственно.

a) $f_n = (0, 0, \dots, \underset{n}{0}, 1, 1, 0, \dots)$;

b) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$f_1 = (1, 0, 0, \dots)$; $f_n = (1, 0, \dots, \underset{n}{\frac{1}{n}}, 0, \dots)$, $n \geq 2$

3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в c_0 , где $f_n = \{0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots\}$.

4. Из данной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в ℓ_p (или c_0)

извлечь подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису $\{e_n\}$ и построить проектор $P: \ell_p \rightarrow \text{sp}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ или проектор $P: c_0 \rightarrow \text{sp}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

a). $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ в ℓ_1 .
n раз

b). $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 1, 0, 0, \dots)$ в c_0 .
n раз

c). $x_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$ в ℓ_1 .

d). $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \dots)$ в c_0 .

5. Доказать, что не существует изоморфизма $T: \ell_3 \rightarrow \ell_2$.

6. Доказать, что пространство ℓ_1^2 не является изометрически изоморфным пространству ℓ_2^2 .

7. Доказать, что не существует изоморфизма $T: \ell_3 \rightarrow \ell_1$.

8. Доказать, что пространство ℓ_2^3 не является изометрически изоморфным пространству ℓ_3^3 .

9. Докажите, что пространство $(\ell_1 \times \ell_1 \times \dots)_{c_0}$ не изоморфно пространству ℓ_1 .

10. Пусть P – произвольный проектор пространства c на c_0 . Докажите, что $\|P\| \geq 2$.
11. Докажите, что пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству ℓ_1 .
12. Построить подпространство $E \subset C[0,1]$, изометричное c_0 и проектор $P: C[0,1]$

$\rightarrow c_0$.

13. Докажите, что пространство $(\ell_1 \times \ell_1 \times \dots)_{c_0}$ не изоморфно пространству c_0 .
14. Можно ли пространство c_0 изоморфно вложить в пространство ℓ_1 .
15. Докажите, что пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству c_0
16. Докажите, что пространство $C[0,1]$ дополняемо не вкладывается в пространство l_∞

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» предполагает ответы на все вопросы и выполнение индивидуальных заданий. Оценка «хорошо» предполагает выполнение индивидуальных заданий, решение одной задачи и ответов на теоретические вопросы с доказательством одного из них. Оценка «удовлетворительно» может быть выставлена за решение задач на экзамене, ответы на теоретические вопросы без доказательства и выполнение индивидуальных заданий в семестре.

11. Учебно-методическое обеспечение

- а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «ИДо» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=11446>
- б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.
- в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.
- г) Методические указания по выполнению индивидуальных заданий

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Fabian M. et al. Functional analysis and infinite-dimensional geometry. – Springer Science & Business Media, 2013.
2. Колмогоров Л.В., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физ.мат.лит, 2009. 570 с.
3. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М: МЦНМО, 2014.
4. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И. А. Задачи по функциональному анализу. Электронное издание М.: МЦНМО, 2017. -334 с. ISBN 978-5-4439-3092-3.

б) дополнительная литература:

1. Albiac F., Kalton N. J. Topics in Banach space theory. – Springer Science & Business Media, 2006. – Т. 233.
2. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases. – Boston: Birkhäuser, 2003. .
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. -448 с

в) ресурсы сети Интернет:
– открытые онлайн-курсы.

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:
публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –

<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –

<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, доцент, канд. физ.-мат. наук, ТГУ, доцент кафедры математического анализа и теории функций.