Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Классическая электродинамика

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Медицинская и биологическая физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
В.П. Демкин

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

ОПК-2 Способность проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные.

ПК-1 Способность проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений

ИОПК 2.1 Выбирает адекватные методы решения научно-исследовательских задач в выбранной области, планирует проведение научных исследований

ИПК 1.1 Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: контрольная работа (ИОПК 1.1, ИОПК 2.1).

По дисциплине «Классическая электродинамика» предусмотрено две контрольные работы. Каждая контрольная работа состоит из пяти задач из открытого банка задач и проводится в форме индивидуального собеседования.

Открытый банк задач для контрольной работы № 1 (ИОПК 1.1, ИОПК 2.1, ИПК 1.1).
Красным цветом отмечены задачи, которые будут рассматриваться при увеличенном объеме практики

Задача 1. Для любого векторного поля $\mathbf{E}$ доказать тождество

$$\mathrm{rot}\,rot\,\mathbf{E} = grad\,\mathrm{d}iv\,\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E},$$

С его помощью получить следствия уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + c\,grad\,\rho\right),$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{r}ot\,\mathbf{j}.$$

Задача 2. а) Докажите, что преобразования Лоренца и трансляции, вообще говоря, не коммутируют: $(\mathbf{1},a)(\Lambda,0) \neq (\Lambda,0)(\mathbf{1},a)$.

б) Докажите, что композиция преобразований Лоренца с матрицами Λ_1, Λ_2 является преобразованием Лоренца с матрицей $\Lambda_2\Lambda_1$. В том числе проверьте, что если $\Lambda_1^T\eta\Lambda_1 = \eta$ и $\Lambda_2^T\eta\Lambda_2 = \eta$, то $(\Lambda_2\Lambda_1)^T\eta(\Lambda_2\Lambda_1) = \eta$.

в) Докажите, что для матрицы преобразования Лоренца $|\det\Lambda| = 1$.

г) Докажите, что композиция двух преобразований Пуанкаре (Λ_1, a_1) и (Λ_2, a_2) является преобразованием Пуанкаре и справедлив закон композиции

$$(\Lambda_2, a_2)\cdot(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2).$$

Задача 3. а) Докажите, что преобразование, обратное к ортохронному преобразованию Лоренца является ортохронным преобразованию Лоренца.

б) Докажите, что композиция ортохронных преобразований Лоренца является ортохронным преобразованию Лоренца.

в) Докажите аналоги утверждений а), б) для преобразований Пуанкаре.

Задача 4. Докажите, что вращение вокруг оси с единичным направляющим вектором $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$ на угол φ задается формулами

$$t' = t, \qquad \mathbf{r}' = (\mathbf{r}, \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos\varphi(\mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin\varphi[\mathbf{r}, \mathbf{n}].$$

Задача 5. Докажите, что лоренцевский буст вдоль направления, заданного единичным вектором $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$ на угол φ задается формулами

$$\mathrm{x}^{',0} = \mathrm{x}^0 \mathrm{ch}\,\varphi + (\mathbf{r}, \mathbf{n})\,\mathrm{sh}\,\varphi, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathrm{x}^0 \mathrm{sh}\,\varphi + (\mathbf{r}, \mathbf{n})\mathrm{ch}\,\varphi). \tag{1}$$

Задача 6. Докажите, что формулы (1) описывают переход в систему отсчета, движущуюся равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\mathbf{v} = -\mathrm{v}\mathbf{n}, \ \mathrm{v} = \mathrm{c}\ \mathrm{th}\,\varphi$$

и могут быть переписаны в виде

$$t' = \gamma\left(t - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{c^2}\right), \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + (\gamma - 1)\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}.$$

Докажите, что в нерелятивистском пределе эти формулы переходят в преобразования Галилея (конечно, без вращения и сдвига в пространстве-времени).

Задача 7. Докажите, что произвольное собственное преобразование Лоренца зависит от *шести* независимых параметров.

Задача 8. В лекциях приведено эвристическое доказательство, что каждое собственное преобразование Лоренца является композицией вращений и лоренцевских бустов. В чем слабое место этого доказательства?

Задача 9. Две инерциальные системы отсчета K и K' связаны собственным преобразованием Лоренца. Докажите, что скорость $\mathbf{v}$ начала декартовой системы координат K' относительно K имеет компоненты

$$\mathbf{v} = -c(\Lambda^0{}_0)^{-1}(\Lambda^0{}_1, \Lambda^0{}_2, \Lambda^0{}_3).$$

Докажите, что скорость $\mathbf{v}'$ начала декартовой системы координат K относительно K' имеет компоненты

$$\mathbf{v}' = c(\Lambda^0{}_0)^{-1}(\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0).$$

Докажите, что $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'| = \mathrm{c}\,|\,\mathrm{th}\,\varphi\,|$, где $\mathrm{ch}\,\varphi = \Lambda^0{}_0$. Обратите внимание, что, вообще говоря $\mathbf{v} \neq -\mathbf{v}'$. Нет ли здесь противоречия?

Задача 10. Докажите, что если интервал между A и B времениподобный, существует система отсчета, в которой эти события происходят в одной точке трехмерного пространства ($\Delta\mathbf{r}' = 0$).

Задача 11. Рассмотрим собственное время как функционал траектории частицы

$$\tau[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2}{c^2}}\, dt \tag{2}$$

с закрепленными концами, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$.

а) Докажите, что прямолинейные траектории являются экстремалями функционала (2).

б) Докажите, что на найденных экстремалях функционал достигает *максимума*.

Задача 12. а) Покажите, что в нерелятивистском пределе $|\mathbf{u}| \ll c$, $|\mathbf{v}| \ll c$ формула

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v} + (1 - \gamma^{-1})\left(\dfrac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{u}\right)}{1 - \dfrac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{c^2}}, \tag{3}$$

полученная в лекциях, переходит в классический закон сложения скоростей $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

б) Выведите из (4) формулу обратного преобразования:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v} + (1-\gamma^{-1})\left(\frac{(\mathbf{u}',\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{u}'\right)}{1 + \frac{(\mathbf{u}',\mathbf{v})}{c^2}}.$$

в) Пусть относительное движение систем отсчета происходит вдоль оси $x^1 \equiv x$, так что $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Проверьте, что в этом случае формулы (3) принимают вид:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \qquad u_y' = \frac{u_y \gamma^{-1}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \qquad u_z' = \frac{u_z \gamma^{-1}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

Задача 13**.** а) Получить из (4) закон преобразования квадрата скорости при лоренцевском бусте:

$$\mathbf{u}'^2 = \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 - \frac{[\mathbf{u},\mathbf{v}]^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{c^2}\right)^2}.$$

б) Докажите, что из неравенств $|\mathbf{u}| < c$ и $|\mathbf{v}| < c$ следует $|\mathbf{u}'| < c$.

в) Докажите, что если $|\mathbf{u}| = c$, то $|\mathbf{u}'| = c$

Задача 14**.** 1) Из инвариантности фазы получить формулы преобразования параметров (частоты, направления вектора нормали и фазовой скорости) плоской волны:

$$\omega' = \omega\gamma\left(1 - v\cos\alpha/u_\phi\right), \qquad \mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{\gamma^{-1}\sin\alpha}{\cos\alpha - vu_\phi/c^2},$$

$$u_\phi' = \frac{u_\phi - v\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^{-2}\sin^2\alpha + (\cos\alpha - vu_\phi/c^2)^2}}.$$

2) Докажите, что если $u_\phi = c$, то $u_\phi' = c$;

3) Проверьте, что величина $\omega^2(1 - c^2/u_\phi^2)$ — лоренц-инвариант.

4) Проверьте, что если положить $u = c^2/u_\phi$, то формулы для преобразования угла нормали и фазовой скорости плоской волны совпадут с формулами для изменения направления и модуля скорости частицы.

5)** Объясните результат предыдущего пункта.

Задача 14**.** Пусть a^μ и b^μ — два ненулевых ортогональных лоренцевских вектора. Докажите, что:

а) если a^μ — времениподобный, то b^μ — пространственноподобный;

б) если a^μ и b^μ — изотропные векторы, то они пропорциональны.

Задача 15**.** Доказать тождества для тензора Леви-Чивиты в пространстве Минковского:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\mu^\beta & \delta_\mu^\gamma & \delta_\mu^\delta \\ \delta_\nu^\alpha & \delta_\nu^\beta & \delta_\nu^\gamma & \delta_\nu^\delta \\ \delta_\rho^\alpha & \delta_\rho^\beta & \delta_\rho^\gamma & \delta_\rho^\delta \\ \delta_\sigma^\alpha & \delta_\sigma^\beta & \delta_\sigma^\gamma & \delta_\sigma^\delta \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\mu^\beta & \delta_\mu^\gamma \\ \delta_\nu^\alpha & \delta_\nu^\beta & \delta_\nu^\gamma \\ \delta_\rho^\alpha & \delta_\rho^\beta & \delta_\rho^\gamma \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\delta} = -2(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu), \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta}\varepsilon^{\alpha\nu\rho\delta} = -6\delta^\alpha_\mu, \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\delta} = -24.$$

Задача 16. Используя тождества для тензора Леви-Чивиты, докажите, что для антисимметричных тензоров $f_{\mu\nu}$ и $\tilde{f}^{\mu\nu}$

$$\tilde{f}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}f_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad f_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu}.$$

Задача 17. Пусть матрица антисимметричного тензора $f_{\mu\nu}$ имеет вид

$$(f_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & 0 & -b_3 & b_2 \\ -e_2 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -e_3 & -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{e}, \mathbf{b})$$

Найдите матрицу соответствующего контравариантного тензора $f^{\mu\nu}$ и матрицы дуального тензора $\tilde{f}^{\mu\nu}$ и $\tilde{f}_{\mu\nu}$. Найдите инварианты

$$\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}, \qquad \frac{1}{4}\tilde{f}_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu}, \qquad \frac{1}{4}f_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu}.$$

Задача 18. Используя тождества для тензора Леви-Чивиты, докажите, что для лоренцевского вектора a^μ и антисимметричного тензора третьего ранга $a_{\mu\nu\rho}$

$$a_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}a^\mu \quad \Leftrightarrow \quad a^\mu = -\frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}a_{\alpha\beta\gamma}.$$

Выпишите компоненты вектора a^μ через компоненты антисимметричного тензора $a_{\alpha\beta\gamma}$ явно.

Задача 19. Докажите, что произвольный антисимметричный лоренцевский тензор четвертого ранга $t^{\alpha\beta\gamma\delta} = t^{[\alpha\beta\gamma\delta]}$ пропорционален тензору Леви-Чивиты,

$$\mathrm{t}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathrm{t}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \text{где } \mathrm{t} = -\frac{1}{24}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{t}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathrm{t}^{0123}.$$

Задача 20. Доказать тождества для тензора Леви-Чивиты в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn} = \begin{vmatrix} \delta^l_i & \delta^m_i & \delta^n_i \\ \delta^l_j & \delta^m_j & \delta^n_j \\ \delta^l_k & \delta^m_k & \delta^n_k \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmk} = \begin{vmatrix} \delta^l_i & \delta^m_i \\ \delta^l_j & \delta^m_j \end{vmatrix} = \delta^l_i\delta^m_j - \delta^l_j\delta^m_i, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = 2\delta^l_i, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} = 6.$$

Задача 21. Докажите что для евклидова вектора a^i и антисимметричного тензора a^{ij}

$$a_{ij} = \varepsilon_{ijk}a^k \quad \Leftrightarrow \quad a_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}a^{jk}.$$

Явно выпишите компоненты a_{ij} через компоненты a^i. Докажите, что произвольный антисимметричный евклидов тензор третьего ранга $t^{ijk} = t^{[ijk]}$ пропорционален тензору Леви-Чивиты,

$$\mathrm{t}^{\mathrm{ijk}} = \mathrm{t}\varepsilon^{\mathrm{ijk}}, \text{где } \mathrm{t} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\mathrm{t}^{\mathrm{ijk}} = \mathrm{t}^{123}.$$

Задача 22. Пусть $\mathbf{a}=(a^i)$ и $\mathbf{b}=(b^i)$ — два евклидовых вектора, компоненты которых вычислены в некотором ортонормированном базисе. Докажите, что вектор с компонентами $\varepsilon_{ijk}a^j b^k$ является векторным произведением $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Задача 23. Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{r})=(A^1,A^2,A^3)$ — евклидово векторное поле, компоненты которого вычисляются в ортонормированном базисе. Докажите, что компоненты $\mathrm{r}ot\mathbf{A}$ равны $(\mathrm{r}ot\mathbf{A})^i=\varepsilon^{ijk}\partial_j A_k$.

Задача 24. Выписать явно закон преобразования компонент лоренцевского ковекторного поля при вращениях

$$\Lambda[A]=(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a^1{}_1&a^1{}_2&a^1{}_3\\0&a^2{}_1&a^2{}_2&a^2{}_3\\0&a^3{}_1&a^3{}_2&a^3{}_3\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&A\end{pmatrix},$$

и при пространственном отражении P. Убедиться, что при таких преобразованиях A_0 преобразуется как скалярное поле, а (A_1,A_2,A_3) преобразуются как компоненты евклидова векторного поля.

Задача 25. Показать, что полученные в лекциях формулы преобразования компонент антисимметричного тензоного поля второго ранга

$$(F_{\mu\nu}(x))=\begin{pmatrix}0&E_1(x)&E_2(x)&E_1(x)\\-E_1(x)&0&-B_3(x)&B_2(x)\\-E_2(x)&B_3(x)&0&-B_1(x)\\-E_1(x)&-B_2(x)&B_1(x)&0\end{pmatrix}\equiv(\mathbf{E}(x),\mathbf{B}(x)),$$

$$E_1'=E_1,\quad E_2'=\gamma(E_2-\beta B_3),\quad E_3'=(E_1+\beta B_2),$$
$$B_1'=B_1,\quad B_2'=\gamma(B_2+\beta E_1),\quad B_3'=\gamma(B_3-\beta E_2).$$

при лоренцевском бусте, могут быть записаны в три-векторной форме:

$$\mathbf{E}'=\gamma\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{B}]\right)+(1-\gamma)\frac{(\mathbf{E},\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2},\qquad \mathbf{B}'=\gamma\left(\mathbf{B}-\frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{E}]\right)+(1-\gamma)\frac{(\mathbf{B},\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}.$$

Задача 26. Явно выписать закон преобразования компонент $(F_{\mu\nu})=(\mathbf{E},\mathbf{B})$ при вращениях $\Lambda[A]$ и при пространственном отражении P. Убедиться, что при этих преобразованиях $\mathbf{E}$ преобразуется как евклидово векторное поле, а $\mathbf{B}$ — как евклидово псевдовекторное поле.

Задача 27. Выписать в явном виде закон преобразования компонент симметричного тензорного поля второго ранга при лоренцевских бустах.

Задача 28. При изучении динамики частицы мы используем обозначения

$$\beta=\frac{|\mathbf{u}|}{c},\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\mathbf{u}$ — скорость частицы, а при изучении преобразований Лоренца использовали *другие* определения для β и γ, а именно $\beta=v/c$, $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$, где v — модуль относительной скорости одной инерциальной системы отсчета относительно другой. В каком смысле эти два определения могут считаться согласованными?

Задача 29. Найти выражения для 4-скорости v^{μ} и 4-ускорения a^{μ}, а также для скаляров $v^{\mu}v_{\mu}$, $a^2=a^{\mu}a_{\mu}$ через лабораторные скорость $\mathbf{u}$ и ускорение $\mathbf{a}$ частицы. Используя полученные выражения, непосредственно убедиться, что $v^{\mu}a_{\mu}=0$. Найти компоненты v^{μ} и a^{μ} для частицы в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета.

Задача 30. В модели свободной релятивистской частицы в параметризации лабораторным временем запишите уравнения Гамильтона и убедитесь, что они эквивалентны уравнениям движения, полученным из функции Лагранжа.
Задача 31. Убедиться, что результаты анализа модели свободной релятивистской частицы в параметризации лабораторным временем и в репараметризационно инвариантной форме полностью эквивалентны.
Задача 32*. На восьмимерном фазовом пространстве с координатами (x^μ, π_ν) определим канонические скобки Пуассона формулами

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0, \quad \{x^\mu, \pi_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \quad \{\pi_\mu, \pi_\nu\} = 0.$$

Докажите, что

$$\{M^{\mu\nu}, \pi_\alpha\} = \delta^\mu_\alpha \pi^\nu - \delta^\nu_\alpha \pi^\mu, \quad \{M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}\} = \eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} + \eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha}.$$

Этот результат согласуется с известным утверждением, что скобки Пуассона двух интегралов движения есть интеграл движения. Как доказывается это утверждение в классической механике? Как это доказательство согласуется с тем, что в рассматриваемой модели $H = 0$? Докажите соотношения

$$\{\pi_\mu, \pi^2\} = 0, \quad \{M^{\mu\nu}, \pi^2\} = 0,$$

где $\pi^2 \equiv \pi_\mu \pi^\mu$. Какое отношение имеют эти тождества к предыдущим вопросам?

Открытый банк задач для контрольной работы № 2 (ИОПК 1.1, ИОПК 2.1, ИПК 1.1)..

Задача 33. Пусть $F_{\mu\nu}(x)$ — тензор электромагнитного поля,

$$c_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \qquad c_2 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}).$$

— инварианты поля. Докажите, что:

1) если в некоторой точке пространства Минковского $c_2 \neq 0$, существует система отсчета, в которой векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в этой точке параллельны;

2) если в некоторой точке пространства Минковского $c_2 = 0$ и $c_1 > 0$, существует система отсчета, в которой $\mathbf{B} = 0$ в этой точке;

3) если в некоторой точке пространства Минковского $c_2 = 0$ и $c_1 < 0$, существует система отсчета, в которой $\mathbf{E} = 0$ в этой точке;

4) если в некоторой точке пространства Минковского $c_1 = c_2 = 0$, то в этой точке векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ во всех инерциальных системах отсчета равны по модулю и ортогональны;

5) преобразованием Лоренца всегда можно достичь, чтобы в данной точке пространства Минковского $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ имели любые значения (не равные нулю одновременно), удовлетворяющие только условиям, что инварианты c_1 и c_2 имеют в этой точке заданные определенные значения. Иначе говоря, пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — напряженность электрического поля и магнитная индукция в некоторой точке пространства Минковского в некоторой инерциальной системе отсчета, причем выполнено хотя бы одно из неравенств $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}_0$ два вектора, не равных нулю одновременно и удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \mathbf{E}_0^2 - \mathbf{B}_0^2, \qquad (\mathbf{E}, \mathbf{B}) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0),$$

а в остальном — произвольных. Тогда существует такое преобразование Лоренца, что $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_0$.

Задача 34. Доказать, что две формы записи первой пары уравнений Максвелла $F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$ и $\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0$ эквивалентны.

Задача 35. Доказать в ковариантной форме, что четыре-вектор тока точечного заряда

$$j^{\mu}(x) = ec \int\limits_{\text{w.-l.}} d\lambda \dot{y}^{\mu}(\lambda)\delta^4(x - y(\lambda))$$

удовлетворяет уравнению непрерывности.

Задача 36. Пусть $A_{\mu}(x)$ и $A_{\mu}^{'}(x)$ — два четыре-потенциала одного и того же электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(x)$. Докажите, что разность $A_{\mu}^{''}(x) = A_{\mu}^{'}(x) - A_{\mu}(x)$ является четыре-потенциалом нулевого электромагнитного поля, $\partial_{\mu}A_{\nu}^{''} - \partial_{\nu}A_{\mu}^{''} = 0$, и является четыре-градиентом: $A_{\mu}^{'}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}f(x)$, где

$$f(x) = \int_0^1 x^{\mu} A_{\mu}^{''}(tx)dt,$$

Задача 37*. Исследуйте применение формулы

$$A_{\mu}(x) = \int_0^1 tx^{\nu} F_{\nu\mu}(tx)dt + \partial_{\mu}f(x),$$

к нахождению потенциала поля точечного заряда и заряда, равномерно распределенного по сфере радиуса $b > 0$.

Задача 38. Докажите, что четырехмерный элемент объема d^4x — пуанкаре-инвариант.

Задача 39. Прямым вычислением доказать, что при прибавлении к лагранжиану четыре-дивергенции уравнения Эйлера-Лагранжа не изменятся.

Задача 40. Докажите, что инвариант электромагнитного поля $c_2(x)$ является дивергенцией некоторого лоренцевского (псевдо)векторного поля.

Задача 41. Докажите, что при бесконечно малом преобразовании координат $x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$

$$\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = 1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu}.$$

Проверьте, что для бесконечно малых преобразований Пуанкаре $\partial_{\mu}\delta x^{\mu} = 0$.

Задача 42. Докажите тождества:

$$\text{(а)} \quad \int\limits_{\text{w.-l.}} d\lambda \frac{d}{d\lambda}\left[f(y(\lambda), x)\delta^4(x - y(\lambda))\right] = 0, \quad \text{(б)} \quad \frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\delta^4(x - y(\lambda)) = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta^4(x - y(\lambda)).$$

Задача 43. Пусть $f_I^{\nu\mu} = -f_I^{\mu\nu}$ спадают до нуля на пространственной бесконечности. Докажите, что нетеровские заряды $Q_I^{'}$ и Q_i, построенные по соответствующим токам $\mathcal{J}'^{\mu}_I = J_I^{\mu} + \partial_{\nu}f_I^{\nu\mu}$ и $\mathcal{J}_I^{\mu}$, равны.

Задача 44. Найдите след тензора энергии-импульса точечной частицы.

Задача 45. Докажите, что нетеровский ток свободных релятивистских частиц, отвечающий однородным преобразованиям Лоренца равен $\mathcal{M}^{\mu}{}_{\alpha\beta} = t^{\mu}{}_{\alpha}x_{\beta} - t^{\mu}{}_{\beta}x_{\alpha}$, где $t^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса. Докажите, что локальный закон сохранения $\partial_{\mu}\mathcal{M}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ является следствием локального закона сохранения для тензора энергии-импульса $t^{\mu}{}_{\nu}$ и найдите соответствующие нетеровские интегралы (докажите, что они совпадают с четыре-тензором момента импульса системы свободных частиц).

Задача 46. Докажите, что в параметризации лабораторным временем выражение для четыре-плотности силы имеет вид

$$\mathcal{F}^{\nu} \equiv \frac{1}{c}F^{\nu\mu}j_{\mu} = \sum_a \frac{e_a}{c}F^{\nu\mu}(t, \mathbf{y}_a(t))v_{a\mu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}_a(t)).$$

Задача 47. Докажите, что нетеровские тождества

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu \equiv \mathcal{F}^\nu. \tag{1}$$

для тензора энергии-импульса точечной релятивистской частицы *эквивалентны* уравнениям движения частиц под действием силы Лоренца

$$ma^\nu = \frac{e}{c} F^{\nu\mu}(y) v_\mu.$$

Задача 48. Найдите интегральную форму тождеств (1) и дайте их физическую интерпретацию.

Задача 49. Выписать явно тождества

$$\partial_\mu (t^\mu{}_\nu \delta x^\nu) = -\frac{1}{c} j^\mu \left(\delta A_\mu + \partial_\mu (A_\nu \delta x^\nu) \right).$$

для бесконечно малых однородных преобразований Лоренца. Проверить, что эти тождества являются следствием (1).

Задача 50. Докажите, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля $T^{\mu\nu}$ симметричен и бесследов

Задача 51. Полный тензор энергии импульса классической электродинамики аддитивен, то есть является суммой тензора энергии импульса частиц и тензора энергии-импульса поля и не содержит владов, связанных с взаимодействием частиц и поля. В чем состоит физическое объяснение аддитивности $\mathcal{J}^\mu{}_\nu$?

Задача 52. Явно вычислить компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

Задача 53. Докажите, что нетеровский ток свободного электромагнитного поля, отвечающий однородным преобразованиям Лоренца может быть записан в виде

$$(\mathcal{M}^\mu_{\alpha\beta})_{field} = T^\mu{}_\alpha x_\beta - T^\mu{}_\beta x_\alpha.$$

Докажите, что локальный закон сохранения $\partial_\mu (M^\mu{}_{\alpha\beta})_{field}$ является следствием локального закона сохранения для тензора энергии-импульса $T^\mu{}_\nu$. Выпишите соответствующие нетеровские интегралы.

Задача 54. Пусть

$$c_1(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \qquad c_2(x) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$$

— инварианты электромагнитного поля. Последовательно докажите тождества:

а) $F^\mu{}_\rho F^\rho{}_\nu = \tilde{F}^\mu_\rho \tilde{F}^\rho_\nu + 2c_1 \delta^\mu_\nu$; б) $F^\mu{}_\rho \tilde{F}^\rho_\nu = -c_2 \delta^\mu_\nu$; в) $F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^\beta{}_\nu = 2c_1 F^\mu{}_\nu - c_2 \tilde{F}^\mu_\nu$;

г) $F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^\beta{}_\gamma F^\gamma{}_\nu = 2c_1 F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu + c_2^2 \delta^\mu_\nu$; д) $T^\mu{}_\alpha T^\alpha{}_\nu = \delta^\mu_\nu (c_1^2 + c_2^2)/(4\pi)^2$.

Задача 55. Проинтегрировать уравнения движения заряда в постоянном однородном электромагнитном поле. Проанализировать частные случаи чисто электрического, чисто магнитного, параллельных электрического и магнитного и скрещенных полей.

Задача 56*. Исследуйте возможность приведения тензора энергии-импульса электромагнитного поля $T^\mu{}_\nu$ к диагональному виду (в данной точке пространства-времени). Чему равны собственные значения матрицы $T^\mu{}_\nu$? Как они выражаются через инварианты поля?

Задача 57. Проверьте справедливость разложения Гельмгольца

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}_l(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}_t(\mathbf{r},t), \qquad \mathrm{r}ot\,\mathbf{j}_l = \mathbf{0}, \quad \mathrm{d}iv\,\mathbf{j}_t = 0,$$

где

$$\mathbf{j}_l = -\frac{1}{4\pi} grad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}iv' \mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \qquad \mathbf{j}_t = \frac{1}{4\pi} rotrot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

Задача 58. Описать остаточный калибровочный произвол и исследовать вторую пару уравнений Максвелла в *калибровке Вейля* ("temporal gauge") $A_0 = 0$.

Задача 59. Покажите, что магнитный потенциал $\mathbf{A}$ плоской электромагнитной волны в кулоновской калибровке может быть выбран поперечным, $(\mathbf{n},\mathbf{A}) = 0$.

Задача 60. Вычислите компоненты тензора натяжений Максвелла (компоненты T^{ij} тензора энергии-импульса) плоской электромагнитной волны.

Задача 61. Выписать формулы для магнитного потенциала $\mathbf{A}(\xi)$ (в кулоновской калибровке), вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\xi)$ и магнитной индукции $\mathbf{B}(\xi)$ монохроматической плоской волны, распространяющейся вдоль оси OZ.

Задача 62. Для волны

$$E_x(\xi) = E_{0x}\cos(\omega\xi + \delta_1), \quad E_y(\xi) = E_{0y}\cos(\omega\xi + \delta_2), \quad E_z(\xi) = E_{0z}\cos(\omega\xi + \delta_3).$$

$$(\mathbf{n},\mathbf{E}) = 0, \qquad \xi = t - \frac{(\mathbf{n},\mathbf{r})}{c}$$

выпишите условие поперечности явно. Также запишите это условие на языке комплексных амплитуд.

Задача 63. Используя выражения для компонент тензора энергии-импульса плоской волны, найденные в предыдущем параграфе, покажите, что тензор энергии-импульса монохроматической плоской волны имеет «лоренц-ковариантный» вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{c^2 T^{00}}{\omega^2} k^\mu k^\nu, \qquad T^{00} = \frac{|\mathbf{E}(\xi)|^2}{4\pi}.$$

Проверьте, что такой $T^{\mu\nu}$ действительно является лоренцевским тензором (то есть докажите, что T^{00}/ω^2 — лоренц-инвариант).

Задача 64. Проинтегрировать уравнения движения релятивистской частицы в поле линейно поляризованной плоской волны. Исследовать полученное решение, в том числе частный случай, когда волна монохроматическая.

Задача 65. Плоская монохроматическая волна движется в направлении оси z. Найти величину и направление осей (относительно произвольных исходных осей x и y) эллипса поляризации по комплексной амплитуде $\mathcal{E}_\mathbf{0}$.

Задача 66. Докажите единственность запаздывающей функции Грина.

Задача 67. Докажите, что запаздывающие потенциалы

$$A^\mu_{\text{ret}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3\mathbf{r}' \frac{j^\mu(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

удовлетворяют калибровке Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Задача 68. Докажите, что в обозначениях, используемых в лекциях,

$$\rho = R\gamma(1-(\mathbf{n},\beta)), \quad U^\mu = c(\gamma(1-(\mathbf{n},\beta)))^{-1}(1,\mathbf{n}),$$

$$q^\mu = c(\gamma(1-(\mathbf{n},\beta)))^{-1}(1-\gamma^2(1-(\mathbf{n},\beta)),\mathbf{n}-\gamma^2(1-(\mathbf{n},\beta))\beta),$$

$$a^\mu - \frac{(a^\alpha R_\alpha)}{c\rho} v^\mu = \gamma^2\left(\frac{(\mathbf{n},\mathbf{a})}{1-(\mathbf{n},\beta)}, \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{n},\mathbf{a})\beta}{1-(\mathbf{n},\beta)}\right).$$

Задача 69. Выведите формулы дифференцирования для запаздывающих переменных:

$$\partial_\mu v^\mu = c\frac{\lambda+1}{\rho}, \quad v^\mu\partial_\mu\rho = c(\lambda+1), \qquad a^\mu\partial_\mu\rho = c^2\frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho}, \quad \dot{a}^\mu\partial_\mu\rho = \frac{1}{c}(-a^2 + \lambda\dot{a}^\mu U_\mu),$$

$$\partial_\mu U_\nu = \frac{1}{c\rho}(c^2\eta_{\mu\nu} - \lambda U_\mu U_\nu - U_\mu v_\nu - U_\nu v_\mu), \quad \partial_\mu \lambda = \frac{1}{c^2}\left(a_\mu + \frac{1}{c^3}\rho \dot{a}^\nu U_\nu U_\mu\right),$$

$$v^\mu \partial_\mu U_\nu = -c\frac{\lambda+1}{\rho}U_\nu, \quad a^\mu \partial_\mu U_\nu = c\frac{a_\nu}{\rho} - c^2\frac{\lambda+1}{\rho^2}(v_\nu + \lambda U_\nu),$$

$$\dot{a}^\mu \partial_\mu U_\nu = \frac{c^2\dot{a}_\nu - \dot{a}^\mu U_\mu v_\nu + (a^2 - \lambda \dot{a}^\mu U_\mu)U_\nu}{c\rho}, \quad U^\mu \partial_\mu \{\tau_{\text{ret}}, U^\nu, v^\nu, a^\nu, \dot{a}^\nu\} = 0,$$

$$U^\mu \partial_\mu R^\nu = U^\nu, \quad U^\mu \partial_\mu \rho = c, \quad U^\mu \partial_\mu \lambda = c\frac{\lambda+1}{\rho}, \quad \partial_\mu U^\mu = \frac{2c}{\rho},$$

$$\Box\rho = \frac{2(2\lambda+1)}{\rho}, \quad \Box f(\rho) = (2\lambda+1)\left(\frac{2f'}{\rho} + f''\right), \quad \Box\frac{1}{\rho} = 0, \quad \Box\tau_{\text{ret}} = \frac{2}{c\rho}, \quad \Box^2\tau_{\text{ret}} = 0,$$

$$\Box\lambda = \frac{4\dot{a}^\nu U_\nu}{c^4}$$

Задача 70. Используя формулы дифференцирования для запаздывающих переменных убедитесь, что потенциал Лиенара-Вихерта точечного заряда

$$A^\mu_{\text{ret}}(x) = \frac{e}{c}\frac{v^\mu(\tau_{ret})}{\rho}.$$

удовлетворяет калибровке Лоренца $\partial_\mu A^\mu_{\text{ret}} = 0$.

Задача 71. Используя ковариантные выражения для поля точечного заряда, полученные в лекциях, получите выражения для поля точечного заряда в лабораторной системе отсчета:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{(1-(\mathbf{n},\beta))^3}\left(\frac{\mathbf{n}-\beta}{R^2} + \frac{[\mathbf{n},[\mathbf{n}-\beta,\mathbf{a}]]}{c^2R}\right), \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{n},\mathbf{E}].$$

Задача 72. Докажите тождества (определение всех величин дано в лекциях):

$$U^\mu a^{\perp q}_\mu = q^\mu a^{\perp q}_\mu = v^\mu a^{\perp q}_\mu = 0, \qquad v^\mu U_\mu = -q^\mu U_\mu = U^\mu K_\mu = c^2,$$

$$K^2 = c^2 + \rho^2(a^{\perp q})^2, \qquad (a^{\perp q})^2 = a^2 + \frac{1}{c^2}(a^{\perp q}_\nu q^\nu)^2.$$

Задача 73. Проверить справедливость ковариантного разложения поля движущегося заряда на кулоновскую часть и поле излучения. Вычислить ток этих полей вне мировой линии. Вычислить тензор энергии-импульса поля излучения.

Задача 74. Покажите, что плотность энергии излучения T^{00}_{rad} не отрицательна. Запишите плотность энергии в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета и исследуйте угловую зависимость излучения.

Задача 75. Докажите, что условная граница между ближней и волновой зонами определяется уравнением $K^2 = 0$. Доказать, что существует такое направление в точку наблюдения, вдоль которого расстояние от заряда до границы равно $\rho = \infty$.

Задача 76. Докажите, что вектор Абрагама можно преобразовать к виду

$$\Gamma^\nu = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\eta^{\nu\mu} - \frac{v^\nu v^\nu}{c^2}\right)\dot{a}_\mu.$$

Выведите отсюда, что $\Gamma^\nu v_\nu = 0$.

Задача 77. Найдите нерелятивистский предел уравнения Лоренца-Абрагама-Дирака

$$m_{\text{phys}}\mathbf{a} - \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}.$$

Задача 78. Покажите, что уравнение Лоренца-Абрагама-Дирака, снабженное асимптотическим условием $\lim\limits_{\tau\to+\infty} a^{\mu}(\tau)=0$, эквивалентно интегральному уравнению

$$a^{\mu}=\frac{e^{\tau/\tau_0}}{m_{\text{phys}}\tau_0}\int\limits_{\tau}^{+\infty}d\sigma e^{-\sigma/\tau_0}\left(F^{\mu}_{\text{ext}}(\sigma)-\frac{1}{c^2}\Re(\sigma)v^{\mu}(\sigma)\right). \qquad (3)$$

Задача 79. Получите из уравнения Лоренца-Абрагама-Дирака с асимптотическим условием $\lim\limits_{\tau\to+\infty} a^{\mu}(\tau)=0$ интегральное уравнение

$$a^{\mu}(\tau)a_{\mu}(\tau)=\frac{1}{m_{\text{phys}}}\int\limits_{0}^{+\infty}d\sigma e^{-\sigma}\left(F^{\mu}_{\text{ext}}(\tau+\frac{1}{2}\tau_0\sigma)a_{\mu}(\tau+\frac{1}{2}\tau_0\sigma)\right).$$

Задача 80. Частица с зарядом e движется в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}=(0,0,B)$. Найти затухающее решение уравнения Абрагама-Лоренца с начальной скоростью $\mathbf{v}_0=(v_0,0,0)$.

Задача 81. Частица с зарядом e движется в поле упругой силы $\mathbf{F}_{\text{ext}}=-m\omega_0^2(x,0,0)$. Найти затухающее решение уравнения Абрагама-Лоренца с начальными условиями $\mathbf{r}_0=\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_0=(v_0,0,0)$.

Задача 82. Докажите, что если все электрические (магнитные) мультипольные моменты системы зарядов до порядка $n-1$ включительно равны нулю, то электрический (соответственно, магнитный) ковариантный мультипольный момент n-го порядка трансляционно инвариантен.

Задача 83. Почему при тех же условиях и используя те же аргументы, что и в предыдущей задаче, нельзя доказать инвариантность ковариантного мультипольного момента n-го порядка относительно произвольных замен $z^{\mu}(\tau)\to z^{\mu}(\tau)+b^{\mu}(\tau)$, то есть при $b^{\mu}(\tau)\neq\text{const}$.

Задача 84. Докажите, что при $r\equiv|\mathbf{r}|\gg|\mathbf{a}_i|, i=1,\dots,n$, плотность заряда и электрический потенциал электрического 2^n-поля равны

$$\rho(\mathbf{r})=ea_1^{i_1}\dots a_n^{i_n}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_n}\delta(\mathbf{r})\equiv e\prod_{l=1}^{n}(\mathbf{a}_l\nabla)\delta(\mathbf{r}),\qquad \varphi(\mathbf{r})=e\prod_{l=1}^{n}(\mathbf{a}_l\nabla)\frac{1}{r}. \qquad (1)$$

Выпишите явно ненулевой электрический мультипольный момент низшего порядка. Чему равны магнитные мультипольные моменты?

Задача 85. Докажите, что при $r\equiv|\mathbf{r}|\gg|\mathbf{a}_i|, i=1,\dots,n$, плотность тока и магнитный потенциал магнитного 2^{n+1}-поля равны

$$j^s(\mathbf{r})=c\varepsilon^{si_{n+1}k}\mathfrak{m}^k_{(o)}a_1^{i_1}\dots a_n^{i_n}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_n}\partial_{i_{n+1}}\delta(\mathbf{r})\equiv c\varepsilon^{sik}\mathfrak{m}^k_{(o)}\prod_{l=1}^{n}(\mathbf{a}_l\nabla)\partial_i\delta(\mathbf{r}), \qquad (2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\prod_{l=1}^{n}(\mathbf{a}_l\nabla)[\mathfrak{m}_{(o)},\nabla]\frac{1}{r}. \qquad (3)$$

Выпишите явно ненулевой магнитный мультипольный момент низшего порядка. Чему равны электрические мультипольные моменты?

Задача 86. Доказать тождества ($R\neq0$)

$$\partial_i R=n^i,\qquad \partial_i\frac{1}{R}=-\frac{n^i}{R^2},\qquad \partial_i n^j=\frac{\delta^{ij}-n^in^j}{R},\qquad \Delta\frac{1}{R}=0. \qquad (4)$$

Задача 87. Записать потенциал и поле электрического диполя в сферических координатах. Начало координат поместить в точку разложения, а ось OZ направить вдоль вектора дипольного момента. Схематически нарисовать линии наряженности электрического поля диполя.

Задача 88. Доказать, что тензор электрического мультипольного момента стационарного 2^n-поля имеет $2n+1$ независимую компоненту.

Задача 89. Для дуального тензора ковариантного магнитного момента стационарного 2^n-поля доказать тождество

$$\mathfrak{m}_{(z)}^{\mu\nu\nu_1\ldots\nu_{n-1}} = \frac{1}{c^2}\dot{z}^{\mu}\dot{z}_{\alpha}\mathfrak{m}_{(z)}^{\alpha\nu\nu_1\ldots\nu_{n-1}} - \frac{1}{c^2}\dot{z}^{\nu}\dot{z}_{\alpha}\mathfrak{m}_{(z)}^{\alpha\mu\nu_1\ldots\nu_{n-1}}$$

Задача 90. Пусть система квазистационарных токов занимает ограниченную область пространства с характерным размером d и точка разложения выбрана внутри области. Докажите, что в n-ом порядке мультипольного разложения магнитное поле системы $\sim R^{-1}(d/R)^{n+1}$.

Задача 91. Докажите, что тензор $\dot{z}_{\mu}\mathcal{M}_{(z)}^{\mu\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu_1\alpha\beta}\dot{z}_{\mu}\mathcal{M}_{(z),\alpha\beta}{}^{\nu_2\ldots\nu_n}$ полностью симметричен и бесследов по любой паре лоренцевских индексов.

Задача 92. В системе покоя проанализировать точное мультипольное разложение для системы с мультипольными моментами, гармонически зависящими от времени. Показать, что поле излучения доминирует в области пространства $r \gg \lambda > d$, а поля статических мультиполей — при $d < r \ll \lambda$.

Задача 93. Вычислить полную мощность излучения с точностью до четвертого порядка по параметру мультипольного разложения $\zeta = d/\lambda$.

Критерии оценивания: результаты каждой контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если студент предъявляет правильные письменные решения не менее трех из пяти задач, то есть для каждой задачи способен обосновать метод решения, понимает используемые термины и формулы и получил правильный ответ. При невыполнении указанных критериев оценки «зачтено» выставляется оценка «не зачтено».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в 5 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит теоретический вопрос, проверяющий компетенции ИОПК 1.1 и две задачи, при решении которых студент демонстрирует компетенции ИОПК 2.1 и ИПК 1.1 После ответа на билет студент отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы)из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов, открытого банка задач (п. 2), открытого перечня обязательных формул и открытого перечня обязательных терминов), направленные на проверку достижения ИОПК 1.1 и ИПК 1.1.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Относительность одновременности. Замедление времени. Собственное время.

Примеры задач:

Задача 1. а) Докажите, что преобразование, обратное к ортохронному преобразованию Лоренца является ортохронным преобразованию Лоренца.

б) Докажите, что композиция ортохронных преобразований Лоренца является ортохронным преобразованию Лоренца.

в) Докажите аналоги утверждений а), б) для преобразований Пуанкаре.

Задача 2. Получить уравнения Гамильтона для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

Если по результатам текущего контроля студент имеет оценки за контрольные работы «зачтено», то студент отвечает только на теоретический вопрос билета и дополнительные вопросы.

Отметка «Зачтено» ставится студенту при правильном ответе не менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных вопросов.

Экзамен в 6 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит два теоретических вопроса, проверяющих компетенции ИОПК 1.1 и две задачи, при решении которых студент демонстрирует компетенции ИОПК 2.1 и ИПК 1.1. После ответа на билет студент отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы (из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов, открытого банка задач (п. 2), открытого перечня обязательных формул и открытого перечня обязательных терминов), направленные на проверку достижения ИОПК 1.1 и ИПК 1.1.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Вывод ковариантных уравнения движения релятивистской частицы во внешнем электро-магнитном поле. Физический смысл уравнений движения. Сила Лоренца. Второй закон Ньютона в релятивистской форме. Сила Минковского.

Вопрос 2. 4-вектор плотности тока. Закон сохранения заряда.

Примеры задач:

Задача 1. Найти выражения для 4-скорости v^{μ} и 4-ускорения a^{μ}, а также для скаляров $v^{\mu}v_{\mu}$, $a^2 = a^{\mu}a_{\mu}$ через лабораторные скорость $\mathbf{u}$ и ускорение $\mathbf{a}$ частицы. Используя полученные выражения, непосредственно убедиться, что $v^{\mu}a_{\mu} = 0$. Найти компоненты v^{μ} и a^{μ} для частицы в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета..

Задача 2. Решить уравнения движения и найти траекторию заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле, в однородном электрическом поле, в однородных и взаимно перпендикулярных полях E и H.

Если по результатам текущего контроля студент имеет оценки за контрольные работы «зачтено», то студент отвечает только на теоретические вопросы билета и дополнительные вопросы.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится при правильном ответе не менее чем на 90% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «хорошо» ставится при правильном ответе не менее чем на 75% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном ответе не менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных вопросов. Оценка «неудовлетворительно» ставится при правильном ответе менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных вопросов.

Открытый перечень вопросов, выносимых на зачет.

1. Постулаты специальной теории относительности. Интервал. Инвариантность изотропного интервала. Лоренцевы координаты и лоренцева метрика. Линейность преобразований из одной инерциальной системы отсчета в другую.
2. Теорема об инвариантности интервала. Пространство Минковского. Преобразования Пуанкаре, преобразования Лоренца, трансляции.
3. Три типа интервалов. Свойства пар событий, разделенных интервалом разного типа, их иллюстрация с помощью светового конуса.
4. Принцип причинности. Критерий выполнения принципа причинности. Ортохронные преобразования Лоренца и Пуанкаре.

5. Собственные и несобственные преобразования Лоренца. Вращения в пространстве Минковского.
6. Лоренцевские бусты. Структура произвольного собственного преобразования Лоренца.
7. Относительность одновременности. Замедление времени. Собственное время.
8. Сокращение размеров движущихся тел.
9. Релятивистский закон сложения скоростей. Аберрация света.
10. Инвариантность фазы, преобразование параметров плоской волны. Эффект Доплера.
11. Лоренцевский тензор. Лоренцевское тензорное поле. Примеры лоренцевских векторов и лоренцевских тензорных полей.
12. Лоренц-инвариантные тензоры.
13. Тензорная алгебра в пространстве Минковского.
14. Дифференцирование лоренцевских тензорных полей.
15. Мировые линии частиц. Условия причинности. Принцип репараметризационной инвариантности мировых линий.
16. Типы параметризаций мировых линий. Параметризации лабораторным и собственным временем. 4-скорость и 4-ускорение релятивистской частицы.
17. Действие свободной релятивистской частицы. Репараметризационная инвариантность.
18. Анализ модели свободной релятивистской частицы в параметризации лабораторным временем.
19. Анализ модели свободной релятивистской частицы в репараметризационно инвариантной форме.
20. Вектор энергии-импульса и 4-тензор момента импульса свободной релятивистской частицы как нетеровские интегралы движения.
21. Модель релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле: функционал действия, репараметризационная инвариантность, канонический и кинетический импульсы, функция Гамильтона.
22. Вывод ковариантных уравнения движения релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. Физический смысл уравнений движения. Сила Лоренца. Второй закон Ньютона в релятивистской форме. Сила Минковского.

Открытый перечень вопросов, выносимых на экзамен.

1. Постулаты специальной теории относительности. Интервал. Инвариантность изотропного интервала. Лоренцевы координаты и лоренцева метрика. Линейность преобразований из одной инерциальной системы отсчета в другую.
2. Теорема об инвариантности интервала. Пространство Минковского. Преобразования Пуанкаре, преобразования Лоренца, трансляции.
3. Три типа интервалов. Свойства пар событий, разделенных интервалом разного типа, их иллюстрация с помощью светового конуса.
4. Принцип причинности. Критерий выполнения принципа причинности. Ортохронные преобразования Лоренца и Пуанкаре.
5. Собственные и несобственные преобразования Лоренца. Вращения в пространстве Минковского.
6. Лоренцевские бусты. Структура произвольного собственного преобразования Лоренца.
7. Относительность одновременности. Замедление времени. Собственное время.
8. Сокращение размеров движущихся тел.
9. Релятивистский закон сложения скоростей. Аберрация света.
10. Инвариантность фазы, преобразование параметров плоской волны. Эффект Доплера.
11. Лоренцевский тензор. Лоренцевское тензорное поле. Примеры лоренцевских векторов и лоренцевских тензорных полей.
12. Лоренц-инвариантные тензоры.
13. Тензорная алгебра в пространстве Минковского.
14. Дифференцирование лоренцевских тензорных полей.

15. Мировые линии частиц. Условия причинности. Принцип репараметризационной инвариантности мировых линий.
16. Типы параметризаций мировых линий. Параметризации лабораторным и собственным временем. 4-скорость и 4-ускорение релятивистской частицы.
17. Действие свободной релятивистской частицы. Репараметризационная инвариантность.
18. Анализ модели свободной релятивистской частицы в параметризации лабораторным временем.
19. Анализ модели свободной релятивистской частицы в репараметризационно инвариантной форме.
20. Вектор энергии-импульса и 4-тензор момента импульса свободной релятивистской частицы как нетеровские интегралы движения.
21. Модель релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле: действие, репараметризационная инвариантность, канонический и кинетический импульсы, функция Гамильтона.
22. Вывод ковариантных уравнения движения релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. Физический смысл уравнений движения. Сила Лоренца. Второй закон Ньютона в релятивистской форме. Сила Минковского.
23. Тензор электромагнитного поля. Преобразование компонент электромагнитного поля при лоренцевских бустах и вращениях. Инварианты поля.
24. Ковариантная форма уравнений Максвелла.
25. Четыре-вектор тока. Закон сохранения электрического заряда.
26. Четыре-потенциал электромагнитного поля. Физический статус четыре-потенциала (два подхода). Принцип калибровочной инвариантности.
27. Выбор калибровки. Калибровка Лоренца. Кулоновская калибровка.
28. Поле как система с бесконечным числом степеней свободы. Уравнения Эйлера-Лагранжа полевой системы. Функционал действия электромагнитного поля.
29. Нётеровские токи и заряды.
30. Тензор энергии-импульса частиц.
31. Канонический и симметричный тензоры энергии-импульса электромагнитного поля.
32. Уравнения Максвелла в пустом пространстве. Плоские волны.
33. Монохроматическая плоская волна. Разложение по монохроматическим плоским волнам.
34. Поляризация монохроматической плоской волны.
35. Задача Коши для однородных уравнений Максвелла во всем пространстве.
36. Запаздывающие поля. Запаздывающая функция Грина. Потенциалы Лиенара-Вихерта.
37. Ковариантные запаздывающие переменные. Тензор электромагнитного поля произвольно движущегося заряда.
38. Структура тензора энергии импульса движущегося заряда. Кулоновское поле и поле излучения.
39. Вектор энергии-импульса излучения.
39. Заряд и электромагнитное поле как замкнутая система. Перенормировка массы заряда.
40. Уравнение Лоренца-Абрагама-Дирака.
41. Ковариантное мультипольное разложение.
41. Мультипольные моменты стационарной системы зарядов. Модели стационарных мультиполей.
42. Поле стационарного электрического мультиполя. Примитивные и бесследовые электрические мультипольные моменты.
43. Дуальность электрических и магнитных стационарных мультиполей. Поле стационарного магнитного мультиполя.
44. Излучение мультиполей.

Обязательные формулы

Тема 1.

1. Формула для общего преобразования Пуанкаре (Λ, a). Условие на матрицу Лоренца Λ.
2. Формула для интервала между событиями.
3. Условие на матрицу ортохронного преобразования Лоренца.
4. Разложение преобразования Пуанкаре в композицию преобразования Лоренца и трансляции.
5. Формула для замедления времени в движущейся системе отсчета и сущность эффекта.
6. Формула для собственного времени.
7. Формулы для лоренцевского буста в направлении одной из координатных осей в параметризации с помощью φ и v.
8. Формула для сокращения размеров движущихся тел и сущность эффекта.
9. Закон релятивистского сложения скоростей в случае движения системы K' относительно K в направлении координатной оси.
10. Формулы для продольного и поперечного эффекта Доплера, их физический смысл.
11. Явный вид лоренц-инвариантных тензоров в инерциальных системах отсчета (дельта-символ, метрика Минковского, тензор Леви-Чивиты).
12. Формулы подъема и опускання лоренцевских индексов.
13. Формула для скалярного произведения лоренцевских векторов.
14. Формула для дуального антисимметричного лоренцевского тензора второго ранга и ее обращение.
15. Формулы для 4-скорости и 4-ускорения релятивистской частицы. Основные свойства векторов v^{μ} и a^{μ}.
16. Действие свободной релятивистской частицы.
17. Функция Гамильтона свободной релятивистской частицы.
18. Формулы для энергии, 3-импульса и 4-импульса свободной релятивистской частицы. Связь энергии и импульса.

Тема 2.

1. Действие релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.
2. Формулы для импульса и энергии релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.
3. Уравнения движения релятивистской частицы под действием силы Лоренца.
4. Закон сохранения энергии для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.
5. Второй закон Ньютона в ковариантной форме.
6. Формула для ковариантной силы Лоренца.

Тема 3.

1. Определение тензора электромагнитного поля через четыре-потенциал.
2. Явный вид матрицы тензора электромагнитного поля.
3. Определение и явный вид матрицы дуального тензора электромагнитного поля.
4. Ковариантное определение я явный вид инвариантов электромагнитного поля.
5. Первая и вторая пара уравнений Максвелла в ковариантной и нековариантной форме.
6. Четыре-вектор тока точечного заряда.
7. Компоненты четыре-вектора тока.
8. Уравнение непрерывности четыре-вектора тока в ковариантной и нековариантной форме.
9. Закон сохранения электрического заряда.
10. Калибровочное преобразование четыре-потенциала.
11. Уравнения Эйлера-Лагранжа для плевой системы.
12. Функционал действия электромагнитного поля.
13. Лагранжиан взаимодействия материи с электромагнитным полем.
14. Функционал действия классической электродинамики.

15. Локальный закон сохранения для нетеровского тока.
16. Неоднозначность определения нетеровского тока.
17. Формула для нетеровского заряда.
18. Выражение для тензора энергии-импульса релятивистских частиц.
19. Выражение для симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля.
20. Выражения для плотности энергии, плотности импульса, вектора Пойнтинга электромагнитного поля.
21. Вектор энергии-импульса электромагнитного поля.
22. Формула для дивергенции тензора энергии-импульса электромагнитного поля (в присутствии материи), ее физический смысл.

Тема 4.

1. Уравнение калибровки Лоренца. Уравнения Максвелла в калибровке Лоренца.
2. Уравнение кулоновской калибровки. Формула для скалярного потенциала в кулоновской калибровке. Уравнения Максвелла в кулоновской калибровке.
3. Определение плоской электромагнитной волны. Формулы для **E** и **B** в плоской электромагнитной волне. Поперечность плоской электромагнитной волны.
4. Формула для **E** и **B** в монохроматической плоской волне.
5. Формулы для волнового три- и четыре-вектора плоской монохроматической волны.
6. Разложение плоской электромагнитной волны в суперпозицию линейно поляризованных волн.
7. Формула для потенциалов Лиенара-Вихерта.
8. Формула для тензора электромагнитного поля движущегося заряда.
9. Инварианты поля движущегося заряда.
10. Энергия-импульс полного излучения движущегося заряда.
11. Релятивистское обобщение формулы Лармора.
12. Уравнение Лоренца-Абрагама-Дирака. Асимптотические условия на решения.
13. Уравнение Абрагама-Лоренца.

Тема 5.

1. Структура ковариантного мультипольного разложения 4-вектора тока.
2. Определение и свойства примитивных ковариантных электрических и магнитных мультипольных моментов.
3. Определение и свойства примитивных и бесследовых электрических и магнитных мультипольных моментов в системе покоя.
3. Структура ковариантного мультипольного разложения электромагнитного поля системы зарядов.
4. Потенциал и поле электрического или магнитного диполя в системе покоя.
5. Структура стационарного мультипольного разложения, его физический смысл.
6. Мультипольное разложение поля излучения системы зарядов, его физический смысл.

Обязательная терминология

Тема 1
Пространство Минковского
Интервал
- временеподобный
- пространственноподобный
- изотропный
Лоренцевские координаты
Преобразование Пуанкаре
- - ортохронное
- - собственное
Преобразование Лоренца

- - ортохронное
- - собственное
Трансляция
Световой конус
- - будущего
- - прошлого
Небесная сфера
Лоренцевский буст
Быстрота
Замедление времени
Собственное время
Релятивистский закон сложения скоростей
Аберрация света
Эффект Доплера
Лоренцевский
- тензор
- вектор
- - пространственноподобный
- - времениподобный
- - изотропный
- ковектор
- скаляр
Лоренцевское
- тензорное поле
- векторное поле
- ковекторное поле
- скалярное поле
Метрика Минковского
Метрика евклидова
Псевдотензор Леви-Чивиты
- евклидов
- в пространстве Минковского
Лоренц-ивариантный тензор
Символ Кронекера
Скалярное произведение лоренцевских векторов
Ортогональные лоренцевские векторы
4-вектор
- скорости частицы
- ускорения частицы
- энергии-импульса
- волновой
Оператор Д'Аламбера
Мировая линия
Принцип причинности
Условия причинности
Репараметризационная инвариантность
Параметризация мировой линии
- пуанкаре-инвариантная
- пуанкаре-неинвариантная
- лабораторным временем
- собственным временем
3-скорость

3-ускорение
4-тензор момента импульса

Тема 2
Канонический 3-импульс
Кинетический («удлиненный»)
-3-импульс
-4-импульс
Сила Лоренца
- ковариантная
Сила Минковского

Тема 3
Четыре-потенциал
Тензор электромагнитного поля
Дуальный тензор электромагнитного поля
Инварианты электромагнитного поля
Уравнения Максвелла
- первая пара
- вторая пара
Четыре-вектор тока
Калибровочное(ый)
- преобразование
- поле
- параметр
Принцип калибровочной инвариантности
Нётеровский
- ток
- заряд
Тензор энергии-импульса
- частиц
- электромагнитного поля
- - канонический
- - симметричный
Плотность энергии
Плотность импульса
Вектор Пойнтинга
4-импульс электромагнитного поля
Тензор натяжений Максвелла
Тензор плотности момента импульса
электромагнитного поля

Тема 4
Калибровка
Калибровка Лоренца
Кулоновская калибровка
Плоская волна
- поперечность
- линейно поляризованная
- монохроматическая
- - амплитуда, частота, длина волны, фаза
- - волновой три-вектор

- - волновой четыре-вектор
- - эллиптически поляризованная
- - поляризованная по кругу
- - линейно поляризованная

Комплексная амплитуда плоской монохроматической волны
Функция Грина
- свободного уравнения Д'Аламбера
- запаздывающая

Запаздывающее поле
Потенциалы Лиенара-Вихерта
Поле излучения движущегося заряда
Кулоновское поле движущегося заряда
Мощность излучения заряда
Регуляризация
Регуляризация обрезанием
Связанный четыре-импульс заряда
Физический четыре-импульс заряда
Электромагнитная масса заряда
Электромагнитная энергия заряда
Механическая (голая) масса заряда
Физическая (перенормированная) масса заряда
Перенормировка массы
Вектор Абрагама (самодействие)
Реакция излучения
Член Шотта
Самоускорение частицы
Предускорение частицы
Асимптотические условия
Силы Пуанкаре

Тема 5
Мультипольное разложение
- четыре-вектора тока
- тензора электромагнитного поля

Тензор поляризации
Мультипольный момент
- ковариантный
- в системе покоя
- примитивный
- бесследовый
- электрический
- магнитный
- дипольный
- квадрупольный
- октупольный

Мультиполь n-го порядка (2^n-поль)
-электрический
-магнитный
Стационарная система зарядов (токов)
Электрический монополь
Диполь

- электрический
- магнитный

Квадруполь
- электрический
- магнитный

Октуполь
- электрический
- магнитный

Вибратор Герца

Дальняя зона (зона излучения)

Ближняя зона (статическая зона)

Переходная (индукционная) зона

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест:

1. Множество событий в пространстве Минковского, отделенных от данного события изотропным интервалом образует:
   а) трехмерный однополостный гиперболоид;
   б) изотропную плоскость;
   в) световой конус;
   г) трехмерный двуполостный гиперболоид.
2. Множество событий в пространстве Минковского, отделенных от данного события постоянным времениподобным интервалом образует:
   а) трехмерный однополостный гиперболоид;
   б) изотропную плоскость;
   в) световой конус;
   г) трехмерный двуполостный гиперболоид.
3. Множество событий в пространстве Минковского, отделенных от данного события постоянным пространственноподобным интервалом образует:
   а) трехмерный однополостный гиперболоид;
   б) изотропную плоскость;
   в) световой конус;
   г) трехмерный двуполостный гиперболоид.
4. Два события в пространстве Минковского могут быть причинно связанными, если они отделены друг от друга
   а) неизотропным интервалом;
   б) дважды изотропным интервалом;
   в) пространственноподобным или изотропным интервалом;
   г) времениподобным или изотропным интервалом;
5. Любое однородное преобразование Лоренца является композицией:
   а) лоренцевских бустов;
   б) трансляций и лоренцевских бустов;
   в) вращений в пространстве и лоренцевских бустов;
   г) вращений в пространстве.
6. Для данной пары событий A и B в пространстве Минковского часы НЕ МОГУТ быть синхронизированы, если
   а) часы находятся в одной инерциальной системе отсчета и $A \neq B$;
   б) часы находятся в разных инерциальных системах отсчета и $A \neq B$;
   в) часы находятся в одной инерциальной системе отсчета и $A = B$;

г) часы находятся в разных инерциальных системах отсчета и $A = B$.

7. Часы движутся произвольным образом в лабораторной (инерциальной) системе отсчета. За промежуток лабораторного времени Δt часы отсчитали промежуток времени $\Delta t'$. Тогда

а) $\Delta t' \leqslant \Delta t$;

б) $\Delta t' \geqslant \Delta t$;

в) $\Delta t' = \Delta t$;

г) $\Delta t' > \Delta t$;

8. Две инерциальные системы отсчета K и K' связаны между собой лоренцевским бустом с параметром $\beta = \mathbf{v}/c$. Релятивистский закон сложения скоростей описывается формулой:

а) $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$;

б) $\mathbf{u}' = \dfrac{\mathbf{u} - \mathbf{v} + (1-\gamma^{-1})\left(\dfrac{(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{u}\right)}{1 - \dfrac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{c^2}}$;

в) $\omega_0 = \omega\gamma$;

г) $\omega_0 = \omega\sqrt{\dfrac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$.

9. Две инерциальные системы отсчета K и K' связаны между собой лоренцевским бустом с параметром $\beta = \mathbf{v}/c$. Продольный эффект Доплера описывается формулой:

а) $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$;

б) $\mathbf{u}' = \dfrac{\mathbf{u} - \mathbf{v} + (1-\gamma^{-1})\left(\dfrac{(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{u}\right)}{1 - \dfrac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{c^2}}$;

в) $\omega_0 = \omega\gamma$;

г) $\omega_0 = \omega\sqrt{\dfrac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$.

10. Две инерциальные системы отсчета K и K' связаны между собой лоренцевским бустом с параметром $\beta = \mathbf{v}/c$. Поперечный эффект Доплера описывается формулой:

а) $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$;

б) $\mathbf{u}' = \dfrac{\mathbf{u} - \mathbf{v} + (1-\gamma^{-1})\left(\dfrac{(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{u}\right)}{1 - \dfrac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{c^2}}$;

в) $\omega_0 = \omega\gamma$;

г) $\omega_0 = \omega\sqrt{\dfrac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$.

11. Число независимых компонент ковариантного антисимметричного тензора второго ранга в пространстве Минковского равно

а) 10;

б) 16;

в) 4;

г) 6.

12. Число независимых компонент ковариантного симметричного тензора второго ранга в пространстве Минковского равно

а) 10;
б) 16;
в) 4;
г) 6.

13. Число независимых компонент вектора в пространстве Минковского равно

а) 3;
б) 1;
в) 4;
г) 10.

14. Тензор напряженности электромагнитного поля в пространстве Минковского является

а) антисимметричным;
б) симметричным бесследовым;
в) симметричным с ненулевым следом;
г) диагональным.

15. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в пространстве Минковского является

а) антисимметричным;
б) симметричным бесследовым;
в) симметричным с ненулевым следом;
г) кратным единичному.

16. Мировая линия линия массивной релятивистской частицы является кривой в пространстве Минковского, касательные векторы к которой:

а) изотропны и направлены в будущее;
б) времениподобны и направлены в будущее;
в) изотропны или времениподобны;
г) изотропны или времениподобны и направлены в будущее.

17. Четыре-скорость массивной релятивистской частицы

а) изотропна и не ортогональна четыре-ускорению частицы;
б) времениподобна и ортогональна четыре-ускорению частицы;
в) пространственноподобна и ортогональна четыре-ускорению частицы;
г) пространственноподобна и не ортогональна четыре-ускорению частицы.

18. Четыре-вектор ускорения массивной релятивистской частицы (если не равен нулю)

а) изотропен;
б) времениподобен;;
в) пространственноподобен;
г) направлен в будущее.

19. Четыре-вектор силы (Минковского)

а) ортогонален четыре-ускорению;
б) времениподобен;
в) изотропен;
г) ортогонален четыре-скорости.

20. Ковариантная сила Лоренца

а) ортогональна четыре-скорости;
б) ортогональна четыре-ускорению;
в) времениподобна;
г) ортогональна четыре-скорости и четыре ускорению.

21. В некоторой системе отсчета только чисто пространственные компоненты тензора электромагнитного поля отличны от нуля. Тогда для инвариантов поля справедливо утверждение:

а) $c_1 = c_2 = 0$;

б) $c_1 < 0$, $c_2 = 0$;

в) $c_1 = 0$, $c_2 > 0$;

г) $c_1 < 0$, $c_2 > 0$.

22. В некоторой системе отсчета чисто пространственные компоненты тензора электромагнитного поля равны нулю. Тогда для инвариантов поля справедливо утверждение:

а) $c_1 = 0$, $c_2 > 0$;

б) $c_1 = c_2 = 0$;

в) $c_1 \geqslant 0$, $c_2 < 0$;

г) $c_1 \geqslant 0$, $c_2 = 0$.

23. Инварианты поля плоской электромагнитной волны обладают свойствами:

а) $c_1 = 0$, $c_2 > 0$;

б) $c_1 = c_2 = 0$;

в) $c_1 \geqslant 0$, $c_2 < 0$;

г) $c_1 \geqslant 0$, $c_2 = 0$.

24. Инварианты поля точечного заряда обладают свойствами:

а) $c_1 > 0$, $c_2 = 0$;

б) $c_1 = 0$, $c_2 > 0$;

в) $c_1 = c_2 = 0$;

г) $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

25. Пусть $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ — векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции плоской электромагнитной волны, $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны. Тогда

а) $[\vec{n}, \vec{E}] = [\vec{n}, \vec{B}] = \vec{0}$;

б) $[\vec{E}, \vec{B}] = (\vec{E}, \vec{B})\vec{n}$;

в) $(\vec{n}, \vec{E}) = (\vec{n}, \vec{B}) = 0$;

г) $(\vec{n}, \vec{E}) = |\vec{E}|, (\vec{n}, \vec{B}) = |\vec{B}|$.

26. Вектор Пойнтинга в плоской электромагнитной волне направлен параллельно

а) нормали к волновому фронту;

б) вектору напряженности электрического поля;

в) вектору напряженности магнитного поля;

г) вектору магнитной индукции.

27. Волновой четыре-вектор плоской электромагнитной волны в вакууме является

а) времениподобным;

б) изотропным;

в) неизотропным;

г) пространственноподобным.

Ключи: 1 в), 2 г), 3 а), 4 г), 5 в), 6 б), 7 а), 8б), 9г), 10 в), 11 г), 12 а), 13 в), 14 а), 15 б), 16 б), 17 б), 18 в), 19 г), 20 а), 21 б), 22 г), 23 б), 24 а), 25 в), 26 а), 27 б).

Проверка знания основных положений, законов и формул:

1. Формула для замедления времени в движущейся системе отсчета и сущность эффекта.
2. Формула для собственного времени.
3. Формулы для лоренцевского буста в направлении одной из координатных осей.

4. Формула для сокращения размеров движущихся тел и сущность эффекта.
5. Закон релятивистского сложения скоростей в случае движения системы K' относительно K в направлении координатной оси.
6. Формулы для продольного и поперечного эффекта Доплера, их физический смысл.
7. Действие свободной релятивистской частицы.
8. Функция Гамильтона свободной релятивистской частицы.
9. Формулы для энергии, 3-импульса и 4-импульса свободной релятивистской частицы. Связь энергии и импульса.
10. Действие релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.
11. Уравнения движения релятивистской частицы под действием силы Лоренца.
12. Определение тензора электромагнитного поля через четыре-потенциал.
13. Явный вид матрицы тензора электромагнитного поля.
14. Первая и вторая пара уравнений Максвелла в ковариантной и нековариантной форме.
15. Четыре-вектор тока точечного заряда.
16. Компоненты четыре-вектора тока.
17. Уравнение непрерывности четыре-вектора тока в ковариантной и нековариантной форме.
18. Закон сохранения электрического заряда.
19. Калибровочное преобразование четыре-потенциала.
20. Функционал действия классической электродинамики.
21. Выражение для симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля.
22. Выражения для плотности энергии, плотности импульса, вектора Пойнтинга электромагнитного поля.
23. Формула для дивергенции тензора энергии-импульса электромагнитного поля (в присутствии материи), ее физический смысл.
24. Уравнение калибровки Лоренца. Уравнения Максвелла в калибровке Лоренца.
25. Уравнение кулоновской калибровки. Формула для скалярного потенциала в кулоновской калибровке. Уравнения Максвелла в кулоновской калибровке.
26. Определение плоской электромагнитной волны. Формулы для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в плоской электромагнитной волне. Поперечность плоской электромагнитной волны.
27. Формула для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в монохроматической плоской волне.
28. Формулы для волнового три- и четыре-вектора плоской монохроматической волны.
29. Формула для потенциалов Лиенара-Вихерта.

Ответ на каждый вопрос должен содержать запись необходимых формул (уравнений), пояснение используемых обозначений и (при необходимости) используемой системы единиц, объяснение физического смысла написанных формул (уравнений) или (если явно указано в вопросе) объяснение сущности описываемых ими физических эффектов.

Информация о разработчиках

Горбунов Иван Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.