

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:

Директор

А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Дискретные математические модели

по направлению подготовки

01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:

Обработка данных, управление и исследование сложных систем

Форма обучения

Очная

Квалификация

Магистр

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л.А. Нежелская

Председатель УМК

С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ПК-5 Способен управлять получением, хранением, передачей, обработкой больших данных.

УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК-5.1 Осуществляет мониторинг и оценку производительности обработки больших данных

ИПК-5.2 Использует методы и инструменты получения, хранения, передачи, обработки больших данных

ИПК-5.3 Разрабатывает предложения по повышению производительности обработки больших данных

ИУК-1.1 Выявляет проблемную ситуацию, на основе системного подхода осуществляет её многофакторный анализ и диагностику.

ИУК-1.2 Осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации.

ИУК-1.3 Предлагает и обосновывает стратегию действий с учетом ограничений, рисков и возможных последствий.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- индивидуальные домашние практические задания и их защита.
- коллоквиум по определениям и понятиям.

Индивидуальные домашние практические задания (ИПК-5.2)

Темы индивидуальных практических заданий:

1. Задача о распределении ресурсов.
2. Задача складирования.
3. Задача о замене оборудования.
4. Решение задачи о назначениях венгерским методом.
5. Решение задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ.
6. Построение неориентированного покрывающего дерева на графе.
7. Алгоритм Форда построения дерева кратчайших путей из заданной вершины.
8. Задача поиска на графе всех кратчайших пути алгоритмом Флойда.
9. Решение задачи сетевого планирования методом критического пути.
10. Задача поиска максимального потока.
11. Задача поиска потока минимальной стоимости.
12. Задача поиска максимального динамического потока.
13. Задача поиска на графе паросочетания максимальной мощности.

Примеры домашних практических заданий:

1. Задача о назначениях (задача выбора).

Для заданной матрицы C найти выбор, сумма элементов которого максимальна.

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 50 & 72 & 60 \\ 12 & 74 & 30 & 62 & 64 \\ 67 & 55 & 37 & 61 & 49 \\ 40 & 40 & 42 & 32 & 10 \\ 25 & 37 & 47 & 65 & 57 \end{pmatrix}$$

Посчитать сумму элементов выбора.

2. Задача складирования.

Планируется использование склада ёмкости $C=10$ для хранения некоторого продукта в течение 6 ед. времени. В начале каждого временного интервала принимается решение об объеме закупок и продаж (в произвольной последовательности). Необходимо так спланировать закупки-продажи при условии пустого склада в начале, чтобы суммарная прибыль была максимальна.

Цены закупок (α_k) и продаж (β_k) даны в таблице:

k	1	2	3	4	5	6
α_k	27	26	18	13	14	22
β_k	28	10	9	11	29	32

1. Указание: использовать Венгерский метод.

Ответ: (c_{14} , c_{22} , c_{31} , c_{43} , c_{55}) $F^*=312$

2. Указание: использовать метод динамического программирования (схему обратного хода).

Ответ: Суммарная прибыль $F^* = 350$.

Оптимальный план закупок-продаж: Q (заполнить склад и продать всё) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ O (не покупать и не продавать) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ O (не покупать и не продавать) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ R (заполнить склад и не продавать) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Q¹ (продать всё и заполнить склад) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P (продать всё и не покупать).

Критерии оценивания: домашние задания зачтены, если получены верные ответы и обучающийся ответил правильно на все вопросы по ходу их решения.

Коллоквиум по определениям и понятиям (ИУК-1.1)

Список вопросов по определениям и понятиям:

1. Граф.
2. Неориентированный граф.
3. Ребро.
4. Петля.
5. Инцидентность вершины и дуги.
6. Инцидентность дуг.
7. Смежность вершин.
8. Цепь.
9. Путь.
10. Цикл.
11. Контур.
12. Связность графа.
13. Компонента связности.

14. Дерево на графе.
15. Покрывающее дерево графа.
16. Разрез.
17. Матрица инцидентий графа.
18. Матрица смежности графа.

Примеры вопросов:

1. Покрывающее дерево графа.
2. Матрица инцидентий графа.

Ответы:

1. Покрывающим деревом графа G называется любое дерево, порождающее подграф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа G .
2. Матрицей инцидентий графа G называется матрица, состоящая из m строк, каждая из которых соответствует определенной вершине, и n столбцов, каждый из которых соответствует определенной дуге. Элемент матрицы (i, j) равен: $+1$, если i -я вершина является начальной для j -й дуги; -1 , если i -я вершина является конечной для j -й дуги; 0 , если i -я вершина и j -я дуга не инцидентны.

Критерии оценивания: коллоквиум зачтен, если обучающийся ответил правильно как минимум на половину вопросов.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Промежуточная аттестация проводится в виде экзамена. Экзамен проводится по билетам в письменной/устной форме, т.е. студент письменно готовится, а затем устно отвечает. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть содержит два вопроса из разных разделов дисциплины, проверяющих ИУК-1.1, ИУК-1.2, ИУК-1.3. Ответы на вопросы даются в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий УК-1, оформленный в виде практической задачи. Ответ предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов. Если студент не пропустил ни одного занятия, выполнил все индивидуальные домашние практические задания и по каждому ответил на вопросы преподавателя, тем самым доказав самостоятельное выполнение, он освобождается от второй части экзаменационного билета – практического задания.

Перечень теоретических вопросов:

1. Общее описание модели ДП.
2. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана.
3. Вычислительная схема "обратного хода".
4. Задача распределения ресурсов.
5. Постановка задачи оптимального распределения ресурсов.
6. Динамическая модель задачи оптимального распределения ресурсов.
7. Динамическая модель задачи складирования, когда покупка предшествует продаже.
8. Динамическая модель задачи складирования, когда продажа предшествует покупке.
9. Динамическая модель задачи о замене оборудования, производящего продукцию.
10. Динамическая модель задачи о замене оборудования, не производящего продукцию.
11. Задача о назначениях. Венгерский метод.
12. Метод ветвей и границ.
13. Алгоритм построения неориентированных покрывающих деревьев.

14. Алгоритм Дейкстры поиска на графе кратчайшего пути.
15. Отличие алгоритма Форда от алгоритма Дейкстры.
16. Обнаружение отрицательного контура.
17. Алгоритм Флойда определения всех кратчайших путей на графе.
18. Задача об узких местах.
19. Задача с усилениями.
20. Сетевые графики. Метод критического пути.
21. Алгоритм поиска увеличивающей цепи на графе.
22. Алгоритм поиска максимального потока на графе.
23. Алгоритм поиска потока минимальной стоимости на графе.
24. Алгоритм поиска максимального динамического потока на графе.
25. Алгоритм построения чередующегося дерева.
26. Алгоритм выбора паросочетания максимального мощности.
27. Задача почтальона.
28. Задача коммивояжера.

Примеры задач:

1. Задача об инвестициях.

Необходимо спланировать распределение средств, имеющихся в количестве R , между N предприятиями, чтобы суммарный доход был максимальным.

$R=30$, $N=3$, средства выделяются кратно 10, функция дохода приведена в таблице:

$u_k \setminus k$	1	2	3
10	5	2	3
20	7	8	6
30	8	15	9

2. Задача складирования.

Планируется использование склада ёмкости C для хранения некоторого продукта в течение k ед. времени. В начале каждого временного интервала принимается решение об объеме закупок и продаж (в произвольной последовательности). Необходимо так спланировать закупки-продажи, чтобы суммарная прибыль была максимальна.

$C=10$, $k=6$, цены закупок (α_k) и продаж (β_k) даны в таблице:

k	1	2	3	4	5	6
α_k	27	26	18	13	14	22
β_k	28	10	9	11	29	32

3. Задача о замене оборудования.

Планируется использование автомобиля в течение 8 лет. Цена нового автомобиля $P=15000$. Эксплуатационные расходы за год на содержание нового автомобиля $r(0)=150$. Эксплуатационные расходы за год на содержание автомобиля возраста t лет $r(t)$ и ликвидационная стоимость автомобиля возраста t лет $\varphi(t)$ даны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$r(t)$	364	1007	2078	3578	5507	7864	10650	
$\varphi(t)$	10000	6666	4444	2962	1975	1316	877	585

В начале каждого года принимается решение о замене либо о сохранении автомобиля. Предполагается, что первый автомобиль достаётся бесплатно, а в конце 8-го года имеющийся к тому моменту автомобиль продаётся, и вырученные средства вычитаются из затрат. Нужно так спланировать замены автомобиля, чтобы суммарные затраты за 8 лет были минимальны.

4. Решение задачи о назначениях (задачи выбора) венгерским методом.

Для заданной матрицы C определить выбор, сумма элементов которого максимальна. Посчитать сумму элементов выбора.

$$C = \begin{pmatrix} 72 & 50 & 42 & 20 & 54 \\ 66 & 4 & 0 & 64 & 22 \\ 40 & 36 & 52 & 20 & 10 \\ 72 & 54 & 14 & 44 & 70 \\ 12 & 2 & 14 & 34 & 32 \end{pmatrix}$$

5. Решение задачи дискретного программирования методом ветвей и границ.

Необходимо решить методом ветвей и границ следующую задачу:

$$L(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ целые.}$$

6. Построение покрывающего дерева минимального веса на неориентированном графе.

Граф задан матрицей смежности:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
<i>a</i>		5	1	2	4							
<i>b</i>			1		7	6						
<i>c</i>					1							
<i>d</i>					1							
<i>e</i>						4	3					
<i>f</i>							6		10			
<i>g</i>								9			12	13
<i>h</i>											15	
<i>k</i>										7	3	
<i>l</i>												
<i>m</i>												8

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется в случае, если студент исчерпывающе отвечает на все вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется в случае, если студент в процессе ответа на вопросы допускает непринципиальные ошибки или неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в случае, если студент в процессе ответа на вопросы делает грубые ошибки, но показывает понимание сути вопросов и правильно использует научную терминологию.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент не понимает сути вопросов, не знает целей алгоритмов, не владеет терминологией.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задание 1 (ИПК-5.1)

Задача об инвестициях (распределения ресурсов).

Необходимо спланировать распределение средств, имеющихся в количестве R , между N предприятиями, чтобы суммарный доход был максимальным.

$R=30$, $N=3$, средства выделяются кратно 10. Функция дохода приведена в таблице:

$u_k \setminus k$	1	2	3
10	5	2	3
20	7	8	6
30	8	15	9

Выполнена условная оптимизация третьего шага.

y_{k-1}	u_k	y_k	$f_3(u_3)$	$Z_4^*(y_3)$	$Z_3(y_2, u_3)$	$f_2(u_2)$	$Z_3^*(y_2)$	$Z_2(y_1, u_2)$	$f_1(u_1)$	$Z_2^*(y_1)$	$Z_1(y_0, u_1)$
0	0	0	0	0	<u>0</u>						
10	0	10	0	0	0						
	10	0	3	0	<u>3</u>						
20	0	20	0	0	0						
	10	10	3	0	3						
	20	0	6	0	<u>6</u>						
30	0	30	0	0	0						
	10	20	3	0	3						
	20	10	6	0	6						
	30	0	9	0	<u>9</u>						

Задание: Продолжить заполнение таблицы, выполнить условную оптимизацию второго шага.

Ответ:

y_{k-1}	u_k	y_k	$f_3(u_3)$	$Z_4^*(y_3)$	$Z_3(y_2, u_3)$	$f_2(u_2)$	$Z_3^*(y_2)$	$Z_2(y_1, u_2)$	$f_1(u_1)$	$Z_2^*(y_1)$	$Z_1(y_0, u_1)$
0	0	0	0	0	<u>0</u>	0	0	<u>0</u>			
10	0	10	0	0	0	0	3	<u>3</u>			
	10	0	3	0	<u>3</u>	2	0	2			
20	0	20	0	0	0	0	6	6			
	10	10	3	0	3	2	3	5			
	20	0	6	0	<u>6</u>	8	0	<u>8</u>			
30	0	30	0	0	0	0	9	9			
	10	20	3	0	3	2	6	8			
	20	10	6	0	6	8	3	11			
	30	0	9	0	<u>9</u>	15	0	<u>15</u>			

Задание 2 (ИПК-5.3)

Задача складирования.

Планируется использование склада ёмкости $C=10$ для хранения некоторого продукта в течение 6 ед. времени. В начале каждого временного интервала принимается решение об объеме закупок и продаж (в произвольной последовательности). Необходимо так спланировать закупки-продажи, чтобы суммарная прибыль была максимальна.

Цены закупок (α_k) и продаж (β_k) даны в таблице:

k	1	2	3	4	5	6
α_k	27	26	18	13	14	22
β_k	28	10	9	11	29	32

Условная оптимизация выполнена:

k	y_{k-1}	$O(0,0)$	$P(0,y_{k-1})$	$Q(C-y_{k-1},C)$	$R(C-y_{k-1},0)$	$Q'(C,y_{k-1})$
6	0			100*		
	C		320*	320		
5	0	100	—	250*	180	—
	C	320	390	—	—	470*
4	0	250	—	230	340*	—
	C	470*	360	—	—	450
3	0	340*	—	250	290	—
	C	470*	430	—	—	380
2	0	340*	—	180	210	—
	C	470*	440	—	—	310
1	0	340	—	350*	200	—
	C	470	620*	—	—	480

Задание: Выполнить этап безусловной оптимизации. Определить максимальное значение прибыли за весь период и оптимальные объемы закупок и продаж в каждом временном интервале.

Ответ:

$y_0 = 0$: $F^* = 350$, $Q \Rightarrow O \Rightarrow O \Rightarrow R \Rightarrow Q^I \Rightarrow P$.

$y_0 = C$: $F^* = 620$, $P \Rightarrow O \Rightarrow O \Rightarrow R \Rightarrow Q^I \Rightarrow P$.

Задание 3 (ИУК-1.1)

Задача о замене оборудования.

Планируется использование автомобиля в течение 8 лет. Цена нового автомобиля $P=15000$. Эксплуатационные расходы за год на содержание нового автомобиля $r(0)=150$. Эксплуатационные расходы за год на содержание автомобиля возраста t лет $r(t)$ и ликвидационная стоимость автомобиля возраста t лет $\varphi(t)$ даны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$r(t)$	364	1007	2078	3578	5507	7864	10650	
$\varphi(t)$	10000	6666	4444	2962	1975	1316	877	585

В начале каждого года принимается решение о замене либо о сохранении автомобиля. Предполагается, что первый автомобиль достаётся бесплатно, а в конце 8-го года имеющийся к тому моменту автомобиль продаётся, и вырученные средства вычитаются из затрат. Нужно так спланировать замены автомобиля, чтобы суммарные затраты за 8 лет были минимальны.

Задание: Начать заполнение таблицы – выполнить условную оптимизацию последнего 8-го шага.

Ответ:

k	u_k	1	2	3	4	5	6	7
8	c	-6302*	-3437*	-884*	1603*	4191	6987	10065
	з	-4850	-1516	706	2188	3175*	3834*	4273*
7	c							
	з							

Задание 4 (ПК-5)

Задача о назначениях (задача выбора).

Для заданной матрицы C определить выбор, сумма элементов которого максимальна. Посчитать сумму элементов выбора.

$$C = \begin{pmatrix} 72 & 50 & 42 & 20 & 54 \\ 66 & 4 & 0 & 64 & 22 \\ 40 & 36 & 52 & 20 & 10 \\ 72 & 54 & 14 & 44 & 70 \\ 12 & 2 & 14 & 34 & 32 \end{pmatrix}$$

Подготовительный этап выполнен – получена матрица C^0 :

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 10 & 44 & 16 \\ 66 & 50 & 52 & 0^* & 48 \\ 32 & 18 & 0^* & 44 & 60 \\ 0 & 0^* & 38 & 20 & 0 \\ 30 & 22 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задание: Выполнить 1-ю итерацию алгоритма – получить матрицу C^1 .

Ответ:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 14 & 48 & 12 \\ 2 & 42 & 52 & 0^* & 40 \\ 28 & 10 & 0^* & 44 & 52 \\ 4 & 0^* & 46 & 28 & 0 \\ 26 & 14 & 8 & 0 & 0^* \end{pmatrix}$$

Задание 5 (УК-1)

Решение задачи дискретного программирования методом ветвей и границ.

Необходимо решить методом ветвей и границ следующую задачу:

$$L(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ целые.}$$

Выполняется 3-я итерация алгоритма, из списка задач выбрана и решена очередная задача:

$$3 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$Z = 0$$

$$\text{её решение: } X^3 = (3, 1.5)^T, L(X^3) = 6.$$

Задание: Продолжить выполнение итерации.

Ответ:

Значение эталона: $Z = 0$

В список задач заносятся 2 новые задачи в следующих границах:

$$3 \leq x_1 \leq 4$$

$$3 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$2 \leq x_2 \leq 2$$

Задание 6 (ИУК-1.2)

Покрывающее дерево на неориентированном графе

Построить покрывающее дерево максимального веса на графе, заданном матрицей смежности:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
<i>a</i>		5	1	2	4							

<i>b</i>			<i>1</i>		<i>7</i>	<i>6</i>						
<i>c</i>					<i>1</i>							
<i>d</i>					<i>1</i>							
<i>e</i>						<i>4</i>	<i>3</i>					
<i>f</i>							<i>6</i>		<i>10</i>			
<i>g</i>								<i>9</i>			<i>12</i>	<i>13</i>
<i>h</i>											<i>15</i>	
<i>k</i>										<i>7</i>	<i>3</i>	
<i>l</i>												
<i>m</i>												<i>8</i>

Задание: Начать выполнение алгоритма – заполнить первые 5 строк таблицы:

Ответ:

<i>Дуга</i>	<i>Вес</i>	<i>Цвет</i>	<i>Букет 1</i>	<i>Букет 2</i>	<i>Букет 3</i>
<i>(h,m)</i>	<i>15</i>	<i>г</i>	<i>h, m</i>		
<i>(g,n)</i>	<i>13</i>	<i>г</i>		<i>g, n</i>	
<i>(g,m)</i>	<i>12</i>	<i>г</i>	<i>g, n</i>		
<i>(f,k)</i>	<i>10</i>	<i>г</i>		<i>f, k</i>	
<i>(g,h)</i>		<i>о</i>			

Теоретические вопросы:

1. Задача о замене оборудования (ИУК-1.3)

Ответ должен содержать формальную постановку задачи, варианты задаваемых параметров и метод решения.

2. Задача о назначениях (ИУК-1.2)

Ответ должен содержать формальную постановку задачи, методы решения, интерпретацию возможных ответов.

3. Задача поиска на графе кратчайших путей (ИУК-1.1)

Ответ должен содержать определения возможных видов кратчайших путей, перечисление алгоритмов решения для каждого случая, их сравнение.

4. Паросочетания и покрытия (ИПК-5.2)

Ответ должен содержать определения паросочетания максимальной мощности и покрытия минимальной мощности, эквивалентность задач их построения, интерпретацию этих понятий.

Информация о разработчиках

Катаева София Семеновна, канд. тех. наук, доцент, кафедра прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук, доцент.