

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан  
Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

**Функции, уравнения, неравенства**

по направлению подготовки

**01.04.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки :  
**Фундаментальная математика**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Магистр**

Год приема  
**2023, 2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
П.А. Крылов

Председатель УМК  
Е.А. Тарасов

Томск 2023

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ОПК-3 Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИОПК 3.1 Популярно и доступно излагает современные научные достижения в сфере математики для аудитории различного уровня

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить особенности формулировок и методы решения задач, сводящихся к исследованию свойств функций и нахождению корней уравнений и неравенств.

– Изучить методические особенности обучения решению задач, сводящихся к исследованию свойств функций и нахождению корней уравнений и неравенств.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Третий семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Решение нестандартных математических задач», «Арифметико-алгебраическая линия изучения математики в средней школе», «Методика преподавания математики и информатики», «Современные информационные технологии в преподавании математики».

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Функции, уравнения и неравенства с модулем.

Дробно-рациональные функции, уравнения и неравенства, содержащие модули. Раскрытие модуля по определению. Метод интервалов. График «корыто». Функции, уравнения и неравенства с модулем специального вида.

Тема 2. Иррациональные функции, уравнения и неравенства.

Уравнение полуокружности. Уравнение-следствие, возведение обеих частей уравнения в квадрат. Сведение иррационального уравнения к системе целых уравнений. Равносильные преобразования при решении иррациональных уравнений и неравенств.

Тема 3. Показательные функции, уравнения и неравенства.

Сведение показательных уравнений и неравенств к общему основанию. Однородные уравнения и неравенства. Метод логарифмирования. Метод рационализации. Степенно-показательные функции, уравнения и неравенства.

Тема 4. Логарифмические функции, уравнения и неравенства.

Свойства логарифмов. Сведение логарифмических уравнений и неравенств к общему основанию. Метод рационализации. Логарифмы с переменным основанием.

Тема 5. Логарифмические функции, уравнения и неравенства.

Тригонометрические формулы. Графики гармонических функций. Определение и свойства обратных тригонометрических функций. Однородные уравнения и неравенства. Введение вспомогательного угла. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Тема 6. Функциональный метод решения уравнений и неравенств смешанного типа.

Графический метод решения уравнений и неравенств. Область определения (ОДЗ) в уравнениях и неравенствах. Метод оценки (мажорант). Применение монотонности, четности и нечетности, периодичности при решении уравнений и неравенств.

## 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки наличия выполненных домашних заданий и выступлений у доски с объяснением домашних заданий. Текущий контроль фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса. Все ответы на теоретические вопросы должны сопровождаться приведением примеров соответствующих задач и рассмотрением методических приемов по обучению решению этих задач. Таким образом, каждый вопрос проверяет ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Продолжительность экзамена 1 час.

Если студент не выполнил в течение семестра домашнее задание по какой-либо из тем, то он получает на зачете дополнительное задание в виде задачи на данную тему. При этом время экзамена увеличивается на 30 минут для каждой дополнительной задачи.

Перечень теоретических вопросов.

1. Линейные преобразования графиков функций. Графики функций  $y = kf(x)$ ,  $y = f(kx)$ ,  $y = f(x) + c$ ,  $y = f(x + c)$ .

2. Степенная функция, ее график и свойства. Графики целых (квадратичной, кубической и высших степеней) и дробно-рациональных функций.

3. Понятие модуля. Построение графиков дробно-рациональных функций с модулем. График «корыто». Графики функций вида  $y = |f(x)|$  и  $y = f(|x|)$ .

4. Решение уравнений и неравенств с модулем (метод интервалов). Решение уравнений вида  $|f(x)| = c$  и  $|f(x)| = |g(x)|$ . Решение неравенств вида  $|f(x)| < c$  и  $|f(x)| > c$ .

5. Графики функций, содержащих квадратные корни и корни высших степеней. Полуокружность как график функции, содержащей квадратный корень.

6. Решение иррациональных уравнений с квадратным корнем. Уравнение-следствие (возведение обеих частей уравнения в квадрат). Сведение иррационального уравнения к системе целых уравнений.

7. Решение иррациональных уравнений с корнями высших степеней. Преобразование суммы (разности) кубических корней.

8. Равносильные преобразования при решении иррациональных неравенств с квадратным корнем. Решение неравенств с кубическими корнями.

9. Показательная и логарифмическая функции, их графики и свойства.

10. Решение показательных уравнений и неравенств. Однородные уравнения и неравенства. Метод рационализации. Метод логарифмирования.

11. Решение логарифмических уравнений и неравенств. Свойства и ОДЗ логарифма. Метод рационализации.

12. Тригонометрические функции, их графики и свойства. Обратные тригонометрические функции.

13. Гармонические колебания, их графики и свойства. Метод введения вспомогательного угла.

14. Решение тригонометрических уравнений. Однородные уравнения. Универсальная тригонометрическая подстановка.

15. Решение тригонометрических неравенств. Точки разрыва тангенса и котангенса.

16. Графический метод решения уравнений и неравенств.

17. Область определения (ОДЗ) как метод решения уравнений и неравенств смешанного типа.

18. Метод мажорант (оценки) решения уравнений и неравенств смешанного типа.

19. Монотонность при решении уравнений и неравенств смешанного типа.

20. Четность и нечетность, периодичность при решении уравнений смешанного типа.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится за исчерпывающий, точный ответ, демонстрирующий хорошее знание и понимание теоретического материала, свободное владение математическим аппаратом и методическими приемами, умение излагать материал последовательно, делать необходимые обобщения и выводы.

Оценка «хорошо» ставится за ответ, обнаруживающий достаточное знание и понимание теоретического материала, владение методическими приемами, умение излагать материал последовательно и грамотно. В ответе может быть недостаточно полно развернута аргументация, возможны отдельные недостатки в формулировке выводов или в методической обоснованности выбора формы подачи материала.

Оценка «удовлетворительно» ставится за ответ, в котором материал раскрыт, в основном, правильно, но недостаточно полно, с отклонениями от последовательности изложения или методически непродуманно. Математически строгие доказательства подменяются правдоподобными рассуждениями, нет полноценных обобщений и выводов, форма подачи материала не выверена.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если ответ обнаруживает незнание теоретического материала и неумение его анализировать, в ответе отсутствуют необходимые математические примеры; нарушены логика и методическая обоснованность в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «IDo» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=14208>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

Примеры задач для выполнения домашних заданий.

Решите уравнения и неравенства.

1.  $\sqrt{\frac{4x-16}{x^2+4x-8}} - 4\sqrt{\frac{x^2+4x-8}{4x-16}} = 1,5$
2.  $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-4} - \sqrt{x-6} - \sqrt{x-4} = \sqrt{2}$
3.  $\sqrt[3]{2x+6} + \sqrt[3]{5-x} = \sqrt[3]{x+11}$
4.  $\frac{x-6}{\sqrt{x^2-5x+4}} \geq 0$
5.  $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} < \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$
6.  $\frac{5^x}{2^{x-1}-5^x} \leq 8 - \frac{2^{x+1}}{5^x}$
7.  $x^4 + 3^{x+4} \geq x^4 \cdot 3^{x+4} + 81$
8.  $(x^2-3)^{2x+3} > (x^2-3)^{5x-3}$
9.  $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}$
10.  $\log_3(\log_{0,5} x) > 1$
11.  $\log_2(4x+6) - \log_2(x^2-5) \leq 1$ ;
12.  $0,5^{\log_3(x^2-1)} > 0,5$
13.  $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_{0,25}(x^2+5x+6)} \geq \sqrt{\frac{2}{5}}$
14.  $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$
15.  $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$
16.  $2 \cos^2 2x + 3 \cos^2 x = 2$
17.  $4^{2 \cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3$
18.  $4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x + \sin 4x \cdot \sin 6x = 0$
19.  $2 \sin 2x - 4 \cos x - \sin x + 1 = 0$
20.  $\sin^2 x + 3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x$
21.  $\sin 2x + 3 \cos^2 x = \sin^2 x$
22.  $3 \sin^2 2x - \sin 4x + 3 \cos^2 2x = 2$
23.  $2^{-|x-2|} \log_2(4x-x^2-2) = 1$
24.  $\log_\pi \cos^2 x = x^4$
25.  $\log_{1/3}(1+(x^2-3x+2)^2) = \sqrt{x^2-6x+8}$ .
26.  $x+2|+4|x-1| = x+10$
27.  $|x-3|+2|x-1| = 3x-5$
28.  $x^2+5|x|-6 = 0$
29.  $|x-1| = x^2+4x+1$
30.  $|x^2-2,5x-12| = 1,5x$

31.  $|x - 5| > 2 + x$

32.  $|2x + 1| < 0,5x + 14$

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

1. Линейные преобразования графиков функций. Графики функций  $y = kf(x)$ ,  $y = f(kx)$ ,  $y = f(x) + c$ ,  $y = f(x + c)$ .

2. Степенная функция, ее график и свойства. Графики целых (квадратичной, кубической и высших степеней) функций.

3. Графики дробно-рациональных функций. Асимптоты.

4. Понятие модуля. Построение графиков дробно-рациональных функций с модулем.

5. График «корыто». Графики функций вида  $y = |f(x)|$  и  $y = f(|x|)$ .

6. Решение уравнений с модулем (метод интервалов). Решение уравнений вида  $|f(x)| = c$  и  $|f(x)| = |g(x)|$ .

7. Решение неравенств с модулем (метод интервалов). Решение неравенств вида  $|f(x)| < c$  и  $|f(x)| > c$ .

8. Графики функций, содержащих квадратные корни и корни высших степеней. Полуокружность как график функции, содержащей квадратный корень.

9. Решение иррациональных уравнений с квадратным корнем. Уравнение-следствие (возведение обеих частей уравнения в квадрат). Сведение иррационального уравнения с квадратными корнями к системе целых уравнений.

10. Решение иррациональных уравнений с корнями высших степеней. Решение уравнений и неравенств с кубическими корнями. Преобразование суммы (разности) кубических корней.

11. Равносильные преобразования при решении иррациональных неравенств с квадратным корнем.

12. Показательная и логарифмическая функции, их графики и свойства.

13. Степенно-показательные функции, их графики и свойства.

14. Решение показательных уравнений. Однородные уравнения. Метод логарифмирования.

15. Решение показательных неравенств. Однородные неравенства. Метод логарифмирования.

16. Показательные неравенства с переменным основанием. Метод рационализации.

17. Решение логарифмических уравнений. Свойства и ОДЗ логарифма.

18. Решение логарифмических уравнений неравенств. Свойства и ОДЗ логарифма.

19. Логарифмы с переменным основанием. Метод рационализации.

20. Тригонометрические функции, их графики и свойства.

21. Обратные тригонометрические функции, их графики и свойства.

22. Гармонические колебания, их графики и свойства. Метод введения вспомогательного угла.

23. Решение тригонометрических уравнений. Однородные уравнения.

24. Универсальная тригонометрическая подстановка и введение вспомогательного угла при решении тригонометрических уравнений.

25. Решение тригонометрических неравенств. Точки разрыва тангенса и котангенса.

26. Графический метод решения уравнений и неравенств.

27. Область определения (ОДЗ) как метод решения уравнений и неравенств смешанного типа.

28. Метод мажорант (оценки) решения уравнений и неравенств смешанного типа.

29. Метод мажорант (оценки) решения неравенств смешанного типа.

30. Монотонность при решении уравнений смешанного типа.

31. Монотонность при решении неравенств смешанного типа.

32. Четность и нечетность, периодичность при решении уравнений смешанного типа.

г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Успешное освоение курса невозможно без напряженной самостоятельной работы студента. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научно-методической литературе);
- решение задач, предложенных в качестве домашнего задания;
- подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения.

При выполнении домашних заданий рекомендуется сначала повторить соответствующий теоретический материал, просмотреть типовые опорные задачи, рассмотренные на лекциях, и примеры, решенные на практических занятиях.

## **12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет**

а) основная литература:

- Сканави М.И., Егерев В.К., Зайцев В.В. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. – М.: АСТ, 2022. – 608 с.
- Золотарёва Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Семендяева Н.Л., Федотов М.В. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями. – М.: «Лаборатория знаний», 2022. – 544 с.

б) дополнительная литература:

- Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. Банк заданий. Задания с развернутым ответом. – М.: «Экзамен», 2022. – 656 с.
- Лаппо Л.Д. ЕГЭ 2020. Эксперт. Математика. Профильный уровень. — М.: «Экзамен», 2020. – 336 с.
- Ерина Т.М. ЕГЭ 2022. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Практическое руководство. – М.: «Экзамен», 2022. – 352 с.
- Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2022. Математика. Уравнения и системы уравнений. Задача 12 (профильный уровень) — М.: МЦНМО, 2022. – 176 с.
- Шестаков С.А. ЕГЭ 2022. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 14 (профильный уровень). — М.: МЦНМО, 2022. – 352 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- Малый мехмат МГУ. <http://mmmf.msu.ru/>
- Интернет-проект «Задачи». <http://www.problems.ru>
- Сайт подготовки к олимпиадам, ДВИ и ЕГЭ по математике <https://mathus.ru/math/>
- Электронная библиотека «Математическое образование» <https://www.mathedu.ru/>

## **13. Перечень информационных технологий**

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

#### **15. Информация о разработчиках**

Гриншпон Яков Самуилович, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный университет, доцент кафедры общей математики.