

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физико-технический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан  
Ю.Н. Рыжих

Оценочные материалы по дисциплине

**Теория функций комплексной переменной**

по направлению подготовки / специальности

**15.03.06 Мехатроника и робототехника**

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:  
**Промышленная и специальная робототехника**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Инженер, инженер-разработчик**

Год приема

**2023**

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОПОП  
Г.Р. Шрагер

Председатель УМК  
В.А. Скрипняк

Томск – 2023

## 1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-2 Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-2.1 Знает методику выявления естественнонаучной сущности проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и методику привлечения физико-математического аппарата и современные компьютерных технологий для их решения

РООПК-2.2 Умеет выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии

## 2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа.

Контрольная работа №1 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа №1 состоит из 3 задач.

Примеры задач:

Задача 1

Выяснить геометрическое множество точек  $|z - i| + |z + i| < 4$

Задача 2

Вычислить  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{40}$

Задача 3

Найти действительную и мнимую части функции  $f(z) = \cos(1 + 2z)$

Ответы:

Задача 1. Множество точек, находящееся внутри эллипса  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Задача 2. 1

Задача 3.  $\operatorname{Re}[f(z)] = \cos(1 + 2x)\operatorname{ch}(2y)$ ;  $\operatorname{Im}[f(z)] = \sin(1 + 2x)\operatorname{sh}(2y)$

Контрольная работа №2 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа №2 состоит из 2 задач.

Примеры задач:

Задача №1

Вычислить интеграл от функции комплексной переменной  $\oint_{|z-i|=2} \frac{e^{2z}}{(z^2 + 4)^2} dz$

## Задача №2

Вычислить интеграл от функции действительной переменной  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$

Ответы:

Задача №1  $\frac{\pi e^{4i}}{16} (1 - 4i)$

Задача №2  $\frac{\pi e^{-2}}{8} \left(1 - \frac{e^{-4}}{3}\right)$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка	Критерии соответствия
Отлично	> 90% заданий выполнено правильно
Хорошо	70% – 90% заданий выполнено правильно
Удовлетворительно	50% – 70% заданий выполнено правильно
Неудовлетворительно	< 50% заданий выполнено правильно

### 3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет с оценкой в четвертом семестре проводится в форме теста. К тесту допускаются студенты, получившие по двум контрольным работам положительные оценки. Тест состоит из 20 вопросов, проверяющих РООПК-2.1, РООПК-2.2. В тесте присутствуют как вопросы, проверяющие знание теоретического материала, так и вопросы, проверяющие умение решать задачи.

#### Перечень теоретических вопросов

- 1 Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
- 2 Алгебраическая форма записи комплексных чисел и операции сложения, вычитания, умножения и деления. Сопряженное комплексное число.
- 3 Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Геометрический смысл сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел. Неравенства треугольника.
- 4 Возведение комплексного числа в целую степень. Формула Муавра. Извлечение корня.
- 5 Возведение действительного числа в комплексную степень. Вывод формулы Эйлера.
- 6 Показательная форма записи комплексных чисел. Логарифм комплексного числа. Главное значение логарифма.
- 7 Вывод условий Коши-Римана. Понятие аналитической функции. Независимость производной аналитической функции от направления дифференцирования. Условия Коши-Римана в полярных координатах.
- 8 Уравнение Лапласа. Сопряженные гармонические функции. Определение гармонической функции по известной сопряженной ей гармонической функции.

- 9 Понятие интеграла от функции комплексной переменной. Условия независимости интеграла от пути интегрирования. Теорема Коши (в том числе для многосвязных областей).
- 10 Понятие первообразной аналитической функции. Вывод формулы Ньютона-Лейбница.
- 11 Вывод интегральной формулы Коши.
- 12 Теорема о среднем для аналитических функций.
- 13 Принцип максимума модуля аналитической функции и его обоснование.
- 14 Вывод интегральной формулы для производных высших порядков аналитической функции. Оценки Коши. Теорема Лиувилля.
- 15 Теорема Абеля. Формулы для определения радиуса круга сходимости степенного ряда.
- 16 Ряд Тейлора и его единственность.
- 17 Ряд Лорана. Формула для коэффициентов ряда. Единственность разложения в степенной ряд аналитической в кольце функции.
- 18 Понятие нуля аналитической функции и его порядка. Теорема единственности для аналитических функций.
- 19 Классификация особых точек аналитической функции.
- 20 Вид ряда Лорана в окрестности особых точек аналитической функции.
- 21 Понятие вычета аналитической функции.
- 22 Формулы для вычисления вычета в простом полюсе (полюсе первого порядка).
- 23 Вывод формулы для вычисления вычета в полюсе порядка  $m$ .
- 24 Теорема Коши о вычетах.
- 25 Понятие бесконечно удаленной точки и вычета в ней.
- 26 Формы ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.
- 27 Вычисление с помощью теории вычетов интегралов вида  $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ .
- 28 Вычисление с помощью теории вычетов интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .
- 29 Вычисление интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx$ .
- 30 Доказательство леммы Жордана.
- 31 Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции  $f(z)$ .
- 32 Основная задача теории конформных отображений
- 33 Дробно-линейная функция. Линейная функция  $f(z)=az+b$ . Инверсия.
- 34 Сфера Римана. Конформность дробно-линейного преобразования в особых точках.
- 35 Инвариантность симметричных точек.
- 36 Мнозначные функции. Точки ветвления.

Примеры теоретических вопросов:

1. Чему равен интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ ? Выбрать один или несколько ответов.

- А)  $f(z_0)$ , если точка  $z_0$  лежит вне контура  $\Gamma$ .
- Б)  $f(z_0)$ , если точка  $z_0$  лежит внутри контура  $\Gamma$ .
- В) 0, если точка  $z_0$  лежит внутри или на границе контура  $\Gamma$ .
- Г) 0, если точка  $z_0$  лежит вне контура  $\Gamma$ .
- Д)  $f(z_0)$ , если точка  $z_0$  лежит внутри или на границе контура  $\Gamma$ .

2. Известно, что функция  $u(x,y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Тогда сопряженная ей гармоническая функция  $v(x,y)$

- А) Может быть найдена из уравнения Лапласа.
- Б) Не может быть найдена.
- В) Может быть найдена с точностью до константы.
- Г) Может быть найдена абсолютно точно.

Примеры задач:

1. При умножении числа  $\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)$  на  $(-i)$  получится следующее число (Выберите один или несколько ответов):

А)  $\exp\left(\frac{5\pi}{4}i\right)$ .

Б)  $\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)$ .

В)  $\exp\left(\frac{7\pi}{4}i\right)$ .

Г)  $\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right)$ .

2. Верно ли, что действительная часть выражения  $\left[\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^5$  равна нулю?

- А) Верно.
- Б) Неверно.

Критерии оценивания:

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Для получения зачета с оценкой студент должен сдать итоговый тест и выполнить две контрольные работы.

Результаты выполнения студентами итогового теста и контрольных работ оцениваются по 100 балльной шкале, которые переводятся в пятибалльную шкалу по следующей схеме: 59 баллов и ниже – «неудовлетворительно», 60 баллов – 73 балла – «удовлетворительно», 74 балла – 86 баллов – «хорошо», 87 баллов – 100 баллов – «отлично».

Оценка за зачет проставляется как округленное среднеарифметическое значение по трем оценкам (за итоговый тест и за две контрольные работы)

#### 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

1. Разложить в ряд Лорана функцию  $f(z)$  в указанной области

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}; \quad 2 < |z| < 3$$

2. Охарактеризовать указанную точку для функции

$$f(z) = \frac{e^{z-1} - 1 - (z-1)}{\sin(z-1) - (z-1)}, \quad z_0 = 1$$

3. Найти вычет функции  $f(z) = \frac{\exp(-1/z^2)}{1+z^4}$  в точке  $z_0=0$ .

Ответы

1.  $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k$

2. Полюс первого порядка.
3. 0.

Тест (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

1. Известно, что в окрестности изолированной особой точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  можно разложить в ряд Лорана. Сколько членов ряда содержит главная часть ряда Лорана, если изолированная особая точка  $z_0$  является существенно особой точкой?  
Выберите один ответ:
  - А) Конечное число членов ряда.
  - Б) Ни одного члена ряда.
  - В) Бесконечное число членов ряда.
2. Какие утверждения верны?
  - А) Любой круг  $|z| < R$  комплексной плоскости  $z$  нельзя конформно отобразить на единичный круг  $|w| < 1$  плоскости  $w$ .
  - Б) Не всякую односвязную область  $D$  комплексной плоскости  $z$ , граница которой состоит из более, чем одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга  $|w| < 1$  плоскости  $w$ .
  - В) Любой круг  $|z| < R$  комплексной плоскости  $z$  можно конформно отобразить на единичный круг  $|w| < 1$  плоскости  $w$ .
  - Г) Любую односвязную область  $D$  комплексной плоскости  $z$ , граница которой состоит из более, чем одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга  $|w| < 1$  плоскости  $w$ .
3. Выберите один ответ: При перемножении комплексных чисел их аргументы
  - А) делятся
  - Б) умножаются
  - В) вычитаются
  - Г) складываются

Ключи

1. В)
2. В), Г)
3. Г)

Теоретические вопросы: (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

1. Возведение действительного числа в комплексную степень.

Ответ должен содержать последовательность действий, в результате которой получается комплексное число, записанное либо в показательной форме, либо в тригонометрической форме.

2. Вывод условий Коши-Римана.

При выводе условий должно быть использовано определение производной и независимость того каким образом точка  $z+\Delta z$  стремится к точке  $z$ .

3. Понятие сферы Римана.

В ответе указать основные свойства сферы Римана и правила, по которым точки сферы отображаются на комплексную плоскость.

### Информация о разработчиках

Миньков Леонид Леонидович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета