Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Численные методы

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математическое моделирование и информационные системы

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-2 Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.

ОПК-4 Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-2.2 Проявляет навыки использования основных языков программирования, основных методов разработки программ, стандартов оформления программной документации.

ИОПК-2.3 Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-2.4 Демонстрирует умение адаптировать существующие математические методы для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-4.2 Применяет знания, полученные в области информационных технологий, при решении задач профессиональной деятельности

ИОПК-4.4 Демонстрирует умение составлять научные обзоры, рефераты и библиографии по тематике научных исследований.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Текущий контроль успеваемости в 5 семестре осуществляется на основании проверки выполнения лабораторных работ, приведенных в 3.1. Студент допускается к зачету при выполнении всех лабораторная работ.

Текущий контроль в 6 семестре осуществляется на основании проверки выполнения заданий к лабораторным работам. Допуск к зачёту с оценкой студент получает при условии выполнения всех заданий к лабораторным работам.

Типовые задания для лабораторных работ при проведении текущего контроля успеваемости по дисциплине.

5 семестр.

Лабораторная работа 1. Основы теории погрешностей

Определить:

- число верных знаков приближенного числа, если известна абсолютная погрешность;

- абсолютную и относительную погрешность, если известно число верных знаков;

- абсолютную погрешность z функции Δz, если известны абсолютные погрешности аргументов.

Значение функции z записать с верными знаками.

Лабораторная работа 2. Найти приближенное значение функции в точке x по таблице значений x_i, y_i, используя многочлен Лагранжа. Построить графики многочлена Лагранжа с табличными значениями и график вычислительной погрешности. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить неустранимую погрешность результата.

Лабораторная работа 3. Найти приближенное значение функции в точке x по схеме Эйткена. Оценить неустранимую погрешность результата.

Лабораторная работа 4. Найти приближенное значение функции в точке x по таблице значений x_i, y_i , используя многочлен Ньютона. Построить графики многочлена Ньютона с табличными значениями и график вычислительной погрешности. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, оценить неустранимую погрешность результата.

Лабораторная работа 5. По заданным значениям x_i, y_i построить линейный сплайн и представить его на графике.

Лабораторная работа 6. По заданным значениям x_i, y_i построить параболический сплайн и представить его на графике.

Лабораторная работа 7. По заданным значениям x_i, y_i построить кубический сплайн и представить его на графике.

На одном графике представить все три сплайна и заданные значения. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

Лабораторная работа 8, Аппроксимировать заданные значения x_i, y_i методом наименьших квадратов используя алгебраический многочлен третьей степени, вывести матрицу Грама, построить графики аппроксимирующего многочлена и исходных данных.

Лабораторная работа 9, Аппроксимировать заданные значения x_i, y_i методом наименьших квадратов используя многочлен третьей степени с использованием ортогональных полиномов Чебышева дискретной переменной, вывести матрицу Грама, построить графики аппроксимирующего многочлена и исходных данных.

Лабораторная работа 10. Построить таблицу конечных разностей для функции, заданной в виде таблицы x_i, y_i на равномерной сетке. Считая, что табличные значения заданы с верными знаками, определить наивысший порядок правильных конечных разностей.

Лабораторная работа 11. Выбрать интерполяционные формулы и с помощью этих формул найти приближенное значение интерполируемой функции в точках x. Обосновать выбор интерполяционных формул. При построении интерполяционной формулы использовать только правильные конечные разности, но не выше четвертого порядка.

Лабораторная работа 12. Используя результаты лабораторных работ 10,11 вычислить 1 и 2 производные в точке *x*. Считая, что заданные значения известны с верными знаками, вычислить следующие погрешности: вычислительную, метода и полную.

Лабораторная работа 13. Вычисление интегралов методами Ньютона-Котеса

Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ по формулам:

1) левых прямоугольников;
2) средних прямоугольников;
3) правых прямоугольников;
4) трапеций;
5) Симпсона;
6) “трех восьмых”.

Процесс вычисления интеграла организовать при использовании метода Рунге без пересчета значений подынтегральной функции в узлах.

Вывести значение интеграла и количество узлов, которое потребовалось для вычисления значения интеграла с заданной точностью.

Лабораторная работа 14, Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ по формуле Гаусса. Вывести значение интеграла и число узлов, которое потребовалось для вычисления интеграла с заданной точностью.

Лабораторная работа 15. Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ по формуле Чебышева. Вывести значение интеграла и число узлов, которое потребовалось для вычисления интеграла с заданной точностью.

Варианты исходных данных для выполнения лабораторная работ приведены в: Смагин В.И., Решетникова Г.Н. Численные методы (аппроксимация, дифференцирование и интегрирование): Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет, 2008. – 184 с.

6 семестр.

Лабораторная работа 1

Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них с точностью до e=0.00005

1. Методом простой итерации
2. Методом Ньютона
3. С применением модификаций методов Ньютона и простой итерации (секущих и Стеффенсена).

Оценить скорость сходимости методов по количеству итераций, необходимых для достижения требуемой точности.

Примеры вариантов заданий:

1) $\ln x + (x+1)^3 = 0$ 2) $x2^x = 1$

Лабораторная работа 2

Найти решение системы нелинейных уравнений графически и уточнить их

а) методом простой итерации с точностью до 0.00005.

б) методом Ньютона с точностью до 0.00005.

Сравнить методы по скорости сходимости

Варианты заданий:

1) $\sin(x+1) - 3y = 1.2$
$\cos(y) + 2x = 2$

2) $\cos(x+1) + 2y = 0.5$
$3x - \cos(y) = 3$

Лабораторная работа 3

Методом Лобачевского решить алгебраическое уравнение с точностью до 0.005.

Варианты заданий:

1) $x^3 - 2x + 2 = 0$ 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$

Лабораторные работы 4 - 9

Определить собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы:

1) методом Данилевского
2) методом Леверье
3) методом Фаддеева
4) методом Крылова
5) методом вращений
6) степенным методом

Примеры вариантов заданий:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 & 3.5 \\ 1.5 & 1 & 2 & 1.6 \\ 2.5 & 2 & 1 & 1.7 \\ 3.5 & 1.6 & 1.7 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1.2 & 2 & 0.5 \\ 1.2 & 1 & 0.4 & 1.2 \\ 2 & 0.4 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1.2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$

Лабораторные работы 10 -11

Получить решение системы линейных алгебраических уравнений с точностью до четырёх верных знаков методом простой итерации и методом Зейделя, предварительно проверить условия сходимости метода. Сравнить методы по скорости сходимости.

Примеры вариантов заданий:

1)

$x_1 = 0.23\, x_1 - 0.04\, x_2 + 0.21\, x_3 - 0.18\, x_4 + 1.24$

$x_2 = 0.45\, x_1 - 0.23\, x_2 + 0.06\, x_3 - 0.88$

$x_3 = 0.26\, x_1 + 0.34\, x_2 - 0.11\, x_3 + 0.62$

$x_4 = 0.05\, x_1 - 0.26\, x_2 + 0.34\, x_3 - 0.12\, x_4 - 1.17$

2)

$x_1 = 0.21\, x_1 + 0.12\, x_2 - 0.34\, x_3 - 0.16\, x_4 - 0.64$

$x_2 = 0.34\, x_1 - 0.08\, x_2 + 0.17\, x_3 - 0.18\, x_4 + 1.42$

$x_3 = 0.16\, x_1 + 0.34\, x_2 + 0.15\, x_3 - 0.34\, x_4 - 0.42$

$x_4 = 0.12\, x_1 - 0.26\, x_2 - 0.08\, x_3 + 0.25\, x_4 + 0.83$

Лабораторная работа 12

Получить решение системы линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня.

Примеры вариантов заданий

1) $3.14\, x_1 - 2.12\, x_2 + 1.17\, x_3 = 1.27$
$-2.12\, x_1 + 1.32\, x_2 - 2.45\, x_3 = 2.13$
$1.17\, x_1 - 2.45\, x_2 + 1.18\, x_3 = 3.14$

2) $2.45\, x_1 + 1.75\, x_2 - 3.24\, x_3 = 1.23$
$1.75\, x_1 - 1.16\, x_2 + 2.18\, x_3 = 3.43$
$-3.24\, x_1 + 2.18\, x_2 - 1.85\, x_3 = -0.16$

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Результаты зачета в 5 семестре

Студент получает «зачет» в 5 семестре, если он уверенно владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования, а также современным программным обеспечением.

Студент получает «незачет», если он недостаточно владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области, а также современным программным обеспечением.

Результаты зачета с оценкой в 6 семестре определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

оценка «отлично», если студент уверенно владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования, а также современным программным обеспечением;

оценка «хорошо», если студент хорошо владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области;

оценка «удовлетворительно», если студент недостаточно владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области, а также современным программным обеспечением;

оценка «неудовлетворительно», если студент не владеет навыками использования математического аппарата для решения задач математического моделирования в своей предметной области, а также современным программным обеспечением, средствами тестирования, верификации и документации ПО.

Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Аттестация в 5 семестре проводится в форме зачета по билетам. Зачет в пятом семестре проводится в форме собеседования. Продолжительность зачета 1,5 часа.

№1.

1. Постановка задачи интерполирования. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
2. Правило наивысшей алгебраической степени точности. Теорема о необходимых и достаточных условиях.
3. Численное дифференцирование при неравноотстоящих узлах по формуле Лагранжа.

№2.

1. Многочлены Чебышева и их свойства.
2. Квадратурные формулы с равными коэффициентами. Теорема о существовании и единственности квадратурного правила.
3. Классификация погрешностей.

№3.

1. Разделенные разности и их свойства. Вывод формулы Ньютона при интерполировании для неравноотстоящих узлов. Вычислительная погрешность многочлена Ньютона.
2. Простейший метод Монте-Карло вычисления однократного интеграла.
3. Погрешность вычисления функций многих переменных.

№4.

1. Конечные разности и их свойства. Вывод формул Ньютона при интерполировании для равноотстоящих узлах. Вычислительная погрешность и погрешность метода.
2. Формулы Ньютона-Котеса и их свойства.
3. Вычисление несобственных интегралов, если подынтегральная функция имеет разрыв 1-го рода.

№5.

1. Конечные разности и их свойства. Вывод формул Гаусса при интерполировании для равноотстоящих узлов. Вычислительная погрешность и погрешность метода.
2. Геометрический метод Монте-Карло вычисления однократного интеграла.
3. Определение абсолютной и относительной погрешности числа.

№6.

1. Сплайн-функции. Определения сплайна, степени сплайна, дефекта сплайна. Условия для определения параметров линейного и параболического сплайнов.
2. Метод Рунге для оценки погрешности формул Ньютона-Котеса.
3. Вычисление несобственных интегралов, если подынтегральная функция имеет разрыв 1-го рода.

№7.

1. Постановка задачи аппроксимации данных методом наименьших квадратов. Аппроксимация данных алгебраическими полиномами и ортогональными полиномами Чебышева.
2. Правило наивысшей алгебраической степени точности. Теорема о корнях многочлена $\omega(x)$.
3. Верные знаки приближенного числа и их определение.

№8.

1. Сплайн-функции. Определения сплайна, степени сплайна, дефекта сплайна. Условия для определения параметров кубического сплайна.
2. Интерполяционные квадратурные формулы. Теорема о степени точности интерполяционных квадратурных формул.
3. Вычисление неопределенных интегралов.

№9.

1. Правило Гаусса наивысшей алгебраической степени точности вычисления интегралов.
2. Сплайн-функции. Определения Условия для определения параметров эрмитова сплайна.
3. Определение абсолютной и относительной погрешностей числа.

№10.

1. Правило наивысшей алгебраической степени точности. Теорема о корнях многочлена $\omega(x)$.
2. Аппроксимация данных ортогональными полиномами Чебышева дискретной переменной.
3. Метод Рунге оценки погрешностей формулы Ньютона-Котеса.

Зачет с оценкой в шестом семестре проводится в форме собеседования. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов для проведения промежуточной аттестации в форме зачета с оценкой в конце 6-го семестра:

Решение трансцендентных уравнений и систем нелинейных уравнений:

1. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.
2. Отделение корней. Метод дихотомии.
3. Методы хорд и касательных. Метод Ньютона.
4. Метод простой итерации. Условие сходимости итерационного метода.
5. Ускорение сходимости итерационных методов.
6. Оценка погрешности решения нелинейных уравнений.
7. Решение систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона.
8. Решение систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации.
9. Метод Лобачевского решения полиномиального уравнения.

Определение собственных значений и собственных векторов матриц:

1. Методы решения полной проблемы собственных значений матриц и методы решения частичной проблемы собственных значений. Методы определения собственных векторов матриц. Методы, применимые для произвольных матриц и матриц специального вида. Прямые методы, которые сводятся к определению корней собственного многочлена, и итерационные методы
2. Метод Данилевского определения собственных чисел и собственных векторов матрицы и его модификации.
3. Метод Крылова определения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
4. Методы ортогонализации.
5. Метод Леверье.
6. Метод Фаддеева.
7. Итерационный метод вращений определения собственных чисел и собственных векторов симметричной матрицы.
8. Определение максимального собственного числа и соответствующего собственного вектора матрицы. Степенной метод. Метод λ-разности определения второго по модулю собственного числа.
9. QR-алгоритм для определения собственных чисел произвольной матрицы.

Решение систем линейных алгебраических уравнений:

1. Прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений для систем с произвольными матрицами, матрицами специального вида и плохо обусловленными матрицами.
2. Нормы векторов и матриц. Сходимость матричной геометрической прогрессии.
3. Метод простой итерации. Теоремы о сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.
4. Методы Зейделя. Теорема о сходимости метода.
5. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений: Гаусса, Якоби, квадратного корня. Метод прогонки для систем с матрицей специального вида.
6. Градиентные методы. Метод наискорейшего спуска. Условия сходимости алгоритмов
7. Анализ погрешности численного решения систем линейных алгебраических уравнений с учётом меры обусловленности матрицы системы

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Список вопросов для оценки остаточных знаний

1. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.
2. Отделение корней. Метод дихотомии.
3. Методы хорд и касательных. Метод Ньютона.
4. Методы определения собственных векторов матриц.
5. Метод Данилевского определения собственных чисел и собственных векторов матрицы и его модификации.
6. Метод Крылова определения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
7. Прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений для систем с произвольными матрицами, матрицами специального вида и плохо обусловленными матрицами.
8. Нормы векторов и матриц. Сходимость матричной геометрической прогрессии.
9. Метод простой итерации. Теоремы о сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Информация о разработчиках

Решетникова Галина Николаевна, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.