

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Симплектическая геометрия

по направлению подготовки
03.04.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная и прикладная физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
О.Н. Чайковская

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ПК-1 – Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК-1.1. Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости;

ИПК-1.2. Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать;

ИПК-1.3. Владеет навыками аналитической переработки информации, проведения исследований с помощью современной аппаратуры и информационных технологий, обобщения и представления результатов, полученных в процессе решения задач исследования.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: индивидуальные задания (ИПК 1.2, ИПК 1.3) формируются из открытого банка задач. Каждое индивидуальное задание содержит 5 заданий, причем не менее одной задачи из каждого блока (первый блок – темы 1, 2, второй блок – темы 3, 4, третий блок – темы 5, 6).. Решения индивидуальных заданий докладываются студентом и обсуждаются в форме научной дискуссии на практических занятиях.

Открытый банк задач для индивидуальных заданий, практических занятий и экзамена (ИПК 1.2, ИПК 1.3).

По темам «1 Линейная симплектическая геометрия» и «2 Симплектические многообразия»

1. Докажите, что линейные канонические преобразования образуют группу.
2. Найдите матричную реализацию алгебры Ли линейной симплектической группы.

3. Докажите, что $\dim Sp(V) = m(2m+1)$, где $m = \frac{1}{2} \dim V$.

4. Установите изоморфизм групп $Sp(m, \mathbb{R}) \cap O(2m, \mathbb{R}) \cong U(m)$.

5. Докажите, что блочная матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2n, \mathbb{R}), \quad \phi \phi \chi \ A_i \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}),$$

тогда и только тогда симплектическая, когда матрицы $A_1^T A_4 - A_3^T A_2$ единичная и матрицы $A_1^T A_3$ и $A_2^T A_4$ симметричные.

6. Докажите, что определитель симплектической матрицы равен единице.

7. Докажите, что линейная симплектическая группа связна.

8. Пусть V — конечномерное линейное пространство, $A: V \rightarrow V$ — линейный изоморфизм, $A^T: V^* \rightarrow V^*$ — транспонированный оператор, $A: V \times V^* \rightarrow V \times V^*$ — порожденное линейное отображение

$$A(\vec{x}, \alpha) = (A\vec{x}, (A^T)^{-1}\alpha).$$

Докажите, что на $V \times V^*$ существует билинейная форма, инвариантная относительно действия всех операторов A . Докажите, что антисимметричная часть этой формы является симплектической формой на $V \times V^*$. Как интерпретировать инвариантность этой формы относительно действия A ?

9. Пусть (V, ω) — линейное симплектическое пространство, $M \in Sp(V)$ — линейное каноническое преобразование. Докажите, что если W симплектическое подпространство в V , инвариантное относительно M , то симплектическое дополнение $W^\perp$ тоже инвариантно.

10. Докажите, что если линейное каноническое преобразование M имеет собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$, то оно также имеет собственные значения λ^{-1} , $\bar{\lambda}$ и $\bar{\lambda}^{-1}$.

11. Докажите, что если линейное каноническое преобразование M имеет собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$ с кратностью k , то оно также имеет собственные значения λ^{-1} с той же кратностью k . Докажите, что если M имеет собственные значения $+1$ или -1 , то кратности этих собственных значений обязательно четные.

12. Пусть $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{2n}\}$ — симплектический базис линейного симплектического пространства V . Линейный оператор $I: V \rightarrow V$ задан формулами

$$I(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1, \dots, I(\vec{e}_n) = -\vec{e}_n, I(\vec{e}_{n+1}) = \vec{e}_{n+1}, \dots, I(\vec{e}_{2n}) = \vec{e}_{2n}.$$

Докажите, что: а) I — инволюция; б) I — антиканоническое преобразование; в) собственные подпространства оператора I , отвечающие собственным значениям ± 1 , лагранжевы.

13. Пусть $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — пространство Шварца быстро убывающих на бесконечности гладких вещественных функций вещественного переменного с билинейной формой

$$\omega: S(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times S(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega(f, g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x dy (f(x)g(y) - g(x)f(y)).$$

Докажите, что $(S(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \omega)$ — слабо симплектическое линейное пространство.

14. Докажите, что симплектическое многообразие ориентируемо.

15. Докажите, что все четные группы когомологий де Рама $H^{2r}(M)$, $r = 0, 1, \dots, \frac{1}{2} \dim M$, симплектического многообразия M ненулевые.

16. Пусть (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) — два компактных связных ориентированных двумерных многообразия и $\int_{M_1} \omega_1 = \int_{M_2} \omega_2$. Доказать, что многообразия (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) симплектоморфны.

17. Привести пример локально гамильтонова векторного поля на некотором симплектическом многообразии, которое не является глобально гамильтоновым.

18. Пусть (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) — два симплектических многообразия одинаковой размерности. Симплектическая два-форма ω на $M = M_1 \times M_2$ определена как

$$\omega = \text{pr}_1^* \omega_1 - \text{pr}_2^* \omega_2,$$

где $\text{pr}_1: M \rightarrow M_1$ и $\text{pr}_2: M \rightarrow M_2$ — канонические проекции. Докажите, что отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ тогда и только тогда является каноническим преобразованием, когда его график — лагранжево подмногообразие в M .

19. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие, $f: M \rightarrow M$ — каноническое преобразование. Докажите, что множество неподвижных точек f получается как пересечение двух лагранжевых подмногообразий в M .

20. Пусть $\alpha \in \Omega^1(Q)$ — один-форма на многообразии Q . Докажите, что график α тогда и только тогда является лагранжевым подмногообразием в T^*Q , когда форма α замкнута.

21. Докажите, что следующие системы дифференциальных уравнений

$$\varsigma) \begin{cases} \dot{q} = q, \\ \dot{p} = -p; \end{cases} \quad \tau) \begin{cases} \dot{q} = \alpha p, \\ \dot{p} = -\beta q; \end{cases} \quad \upsilon) \begin{cases} \dot{q}^1 = -\gamma q^2 + p_1, \\ \dot{q}^2 = p_2, \\ \dot{p}_1 = -\alpha q^1, \\ \dot{q}^2 = -(\beta + \gamma)q^2 + \gamma p_1 \end{cases}$$

являются гамильтоновыми относительно канонической симплектической структуры. Найдите соответствующие гамильтонианы и гамильтоновы векторные поля.

22. Пусть $\omega = dp \wedge dq$ — каноническая симплектическая структура на $\mathbb{R}^2$.

Докажите, что в терминах комплексной координаты $z = q + ip$:

$$\omega = \frac{1}{2i} dz \wedge d\bar{z}, \quad X_f = 2i \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \{f, g\} = -2i \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial g}{\partial z} \right),$$

а уравнения Гамильтона с гамильтонианом h записываются в виде $\dot{z} = -2i \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$.

23. Пусть (V, ω) — слабо симплектическое банахово пространство, $\hat{A}: D(\hat{A}) \rightarrow V$ — непрерывный линейный оператор, определенный в области $D(\hat{A}) \subset V$. Назовем оператор $\hat{A}$ *гамильтоновым оператором*, если существует такая функция $h_{\hat{A}}: D(\hat{A}) \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\omega(\hat{A}\psi_1, \psi_2) = -dh_{\hat{A}}(\psi_1) \cdot \psi_2$$

для любых векторов $\psi_1, \psi_2 \in D(\hat{A})$. Докажите, что:

а) Оператор $\hat{A}$ тогда и только тогда гамильтонов, когда он кососимметричен, то есть $\omega(\hat{A}\psi_1, \psi_2) = -\omega(\psi_1, \hat{A}\psi_2)$ для любых векторов $\psi_1, \psi_2 \in D(\hat{A})$;

б) Если оператор $\hat{A}$ гамильтонов, то соответствующую функцию $h_{\hat{A}}$ можно определить как $h_{\hat{A}}(\psi) = -\frac{1}{2} \omega(\hat{A}\psi, \psi)$;

в) Для любых гамильтоновых операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ на области определения коммутатора $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ справедлива формула $\{h_{\hat{A}}, h_{\hat{B}}\} = h_{[\hat{A}, \hat{B}]}$.

По темам «3 Однородные симплектические многообразия» и «4 Поляризация на симплектическом многообразии»

1. Показать, что в линейном симплектическом пространстве трансляции являются каноническими преобразованиями. Найти соответствующие гамильтонианы и коцикл.

2. Найти гамильтонианы для действия линейной симплектической группы $SP(V)$ на линейном симплектическом пространстве V .

3. Провести классификацию однородных симплектических многообразий группы Евклида плоскости $ISO^+(2)$. Для каждого многообразия найти инвариантную симплектическую два-форму, гамильтонианы и соответствующие векторные поля.

4. Показать, что на поверхности $H = -E < 0$ интегралы задачи Кеплера $\vec{M}$ и $\vec{A}/\sqrt{-2mH}$ совпадают с гамильтоновыми генераторами точечных канонических преобразований, индуцированных евклидовыми вращениями в $\mathbb{R}^4$.

5. Провести классификацию однородных симплектических многообразий группы вращений $SO(3, \mathbb{R})$. Для каждого многообразия найти инвариантную симплектическую два-форму, гамильтонианы и соответствующие векторные поля.
6. Записать уравнения Гамильтона в редуцированном фазовом пространстве для двух плоских взаимодействующих маятников.
7. Построить классификацию массивных и безмассовых элементарных динамических систем для группы Пуанкаре.
8. Построить классификацию элементарных динамических систем для группы Галилея.
9. Найти инвариантную вещественную поляризацию невырожденных коприсоединенных орбит группы Евклида плоскости $ISO^+(2)$.
10. Найти инвариантную комплексную поляризацию невырожденных коприсоединенных орбит группы вращений $SO(3, \mathbb{R})$.
11. Пусть (M, ω) — симплектическом многообразиие, P — вещественная поляризация с односвязными геодезически полными слоями и пусть Q — лагранжево подмногообразие в M , пересекающее каждый слой трансверсально ровно в одной точке. Постройте естественное отождествление M с T^*Q , при котором ω совпадает с канонической два-формой, P совпадает с вертикальным слоением, а Q — с нулевым сечением в T^*Q .
12. Исследовать общую структуру сильно интегрируемой смешанной поляризации на симплектическом многообразии.

По темам «5 Предквантование Кириллова-Костанта-Сурьо» и «6 Геометрическое квантование»

1. Докажите, что нетривиальное симметричное (вейлевское) квантование на плоскости не совместимо с точным выполнением принципа соответствия в классе всех полиномов.
2. Докажите, что генератор любой непрерывной однопараметрической группы унитарных операторов в гильбертовом пространстве является самосопряженным оператором.
3. Пусть G — компонента единицы группы обратимых верхнетреугольных матриц третьего порядка, $\mu \in \mathcal{G}^*$ — элемент дуальной алгебры Ли вида

$$\mu = \begin{pmatrix} c & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & c & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Докажите, что коприсоединенная орбита, проходящая через точку μ с симплектической структурой Кириллова-Костанта-Сурьо — квантуемое многообразие.

4. Пусть (M, ω) — квантуемое многообразие, $\delta: F(M) \rightarrow L(M)$ — предквантовый оператор. Покажите, что $\delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f) - f \cdot g$ для любых гладких функций $f, g \in F(M)$.

5. Пусть (M, ω) — квантуемое многообразие. Вычислить предквантовый оператор в терминах главного $\mathbb{C}^*$ -расслоения над M , ассоциированного с комплексным расслоением M .

6. Пусть $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$, $\theta = \frac{1}{2}(pdq - qdp)$ — симплектический потенциал, $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ — функция Гамильтона одномерного гармонического осциллятора.

Докажите, что: а) предквантовый оператор δ_H имеет целочисленный спектр (в единицах $\hbar$); б) операторы $\delta_H, \delta_p, \delta_q$ и id образуют базис четырехмерной разрешимой алгебры Ли $\mathcal{G}$; в) алгебра Ли $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ изоморфна алгебре Гейзенберга-Вейля.

7. Вывести условие квантования спина для элементарной $SO(3, \mathbb{R})$ - или $SU(2)$ -инвариантной динамической системы.

8. Вывести условие квантования спина для релятивистской частицы.

Критерии оценивания индивидуального задания:

Результаты индивидуального задания определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится при представлении полных правильных решений не менее четырех задач индивидуального задания (из пяти), или трех задач и представлении частичных решений оставшихся двух задач.

Оценка «хорошо» ставится при представлении полных правильных решений не трех задач индивидуального задания (из пяти), или двух задач и представлении частичных решений оставшихся задач.

Оценка «удовлетворительно» ставится при представлении полных правильных решений двух задач индивидуального задания (из пяти), но при отсутствии даже частичного решения всех оставшихся задач.

Если представление решения индивидуального задания студентом не удовлетворяет критериям оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», то ставится оценка «неудовлетворительно».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в 4-ом семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам. Билет содержит два теоретических вопроса, направленных на проверку достижения ИПК 1.1 и ИПК 1.2 и три задачи из открытого банка задач (приведен выше в п. 2), решение которых демонстрирует достижение ИПК 1.1, ИПК 1.2 и ИПК 1.3. Продолжительность подготовки к ответу на билет 2 часа. После ответа на билет студент отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов (проверка достижения ИПК 1.1 и ИПК 1.2) и открытого перечня задач (проверка достижения ИПК 1.1, ИПК 1.2 и ИПК 1.3.).

Пример экзаменационного билета.

Вопрос 1. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Симплектический потенциал.

Вопрос 2. Постановка задачи геометрического квантования. Геометрическое квантование кокасательных расслоений.

Задача 1. Пусть $\omega = dp \wedge dq$ — каноническая симплектическая структура на $\mathbb{R}^2$.

Докажите, что в терминах комплексной координаты $z = q + ip$:

$$\omega = \frac{1}{2i} dz \wedge d\bar{z}, \quad X_f = 2i \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \{f, g\} = -2i \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial g}{\partial z} \right),$$

а уравнения Гамильтона с гамильтонианом h записываются в виде $\dot{z} = -2i \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$.

Задача 2. Вывести условие квантования спина для элементарной $SO(3, \mathbb{R})$ -инвариантной динамической системы.

Задача 3. Показать, что на поверхности $H = -E < 0$ интегралы задачи Кеплера $\vec{M}$ и $\vec{A}/\sqrt{-2mH}$ совпадают с гамильтоновыми генераторами точечных канонических преобразований, индуцированных евклидовыми вращениями в $\mathbb{R}^4$.

Критерии оценивания.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Студенты, имеющие по результатам текущего контроля (п. 2) оценку не ниже «хорошо» освобождаются от решения задач на экзамене и отвечают только на теоретические вопросы. При применении критериев выставления оценки за экзамен считается, что такие студенты правильно решили две задачи экзаменационного билета.

Оценка «отлично» ставится:

- при логически связном, полном и правильном ответе на все теоретические вопросы и решении не менее двух задач экзаменационного билета, либо
- при логически связном, полном и правильном ответе на один теоретический вопрос, решении не менее двух задач экзаменационного билета и ответе на два дополнительных вопроса.

Оценка «хорошо» ставится:

- при логически связном, полном и правильном ответе на все теоретические вопросы и решении одной задачи экзаменационного билета, либо
- при логически связном, полном и правильном ответе на один теоретический вопрос, решении двух задач экзаменационного билета и ответе на один дополнительный вопрос из двух.

Оценка «удовлетворительно» ставится:

- при логически связном, полном и правильном ответе на один теоретический вопрос, решении не менее двух задач экзаменационного билета и неправильном ответе (отсутствии ответа) на два дополнительных вопроса, либо
- при логически связном, полном и правильном ответе на один теоретический вопрос, решении одной задачи экзаменационного билета и ответе на один дополнительный вопрос из двух.

Если ответ студента не удовлетворяет критериям оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», то ставится оценка «неудовлетворительно».

Открытый перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамен.

1. Линейные симплектические пространства. Симплектический базис. Линейная симплектическая группа.
2. Изотропные, коизотропные и лагранжевы подпространства линейного симплектического пространства.
3. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Симплектический потенциал.
4. Алгебра гамильтоновых векторных полей, скобки Пуассона на симплектическом многообразии.
5. Редукция симплектического многообразия по связям первого и второго рода.
6. Отображение моментов. Существование моментов для конкретных симметрий.
7. Классические элементарные динамические системы (метод коприсоединенных орбит).
8. Симплектическая геометрия кокасательных расслоений: каноническая симплектическая структура, производящая функция канонического преобразования действие как производящая функция канонического преобразования, точечные канонические преобразования.
9. Геометрия вещественных поляризаций.
10. Геометрия комплексных поляризаций.
11. Предквантование Кириллова-Костанта-Сурьо. Предквантовый оператор. Квантуемые многообразия. Связь с условиями Бора-Зоммерфельда.
12. Постановка задачи геометрического квантования. Геометрическое квантование кокасательных расслоений.

13. Реализации пространства состояний в методе геометрического квантования. Квантование полуформ.
14. Спаривание Блаттнера-Костанта. Примеры спариваний.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест (в каждом вопросе необходимо указать все правильные ответы или верные утверждения; их может быть один или несколько):

1. Для любой физической системы каноническая симплектическая структура определена:

- а) на конфигурационном пространстве;
- б) на фазовом пространстве импульсов;
- в) на фазовом пространстве скоростей;
- г) на расширенном конфигурационном пространстве;
- д) на расширенном фазовом пространстве импульсов;
- е) на расширенном фазовом пространстве скоростей.

2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задана каноническая симплектическая структура с координатами Дарбу (p, q) . Какие из перечисленных ниже векторных полей являются гамильтоновыми?

- а) $\frac{\partial}{\partial p}$; б) $\frac{\partial}{\partial q}$; в) $p \frac{\partial}{\partial p}$; г) $q \frac{\partial}{\partial q}$; д) $p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q}$; е) $p \frac{\partial}{\partial p} - q \frac{\partial}{\partial q}$.

3. Какое векторное поле является гамильтоновым, отвечающим гамильтониану одномерного гармонического осциллятора $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$?

- а) $p \frac{\partial}{\partial q}$; б) $q \frac{\partial}{\partial p}$; в) $p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial p}$; г) $p \frac{\partial}{\partial q} - q \frac{\partial}{\partial p}$.

4. Скобка Пуассона $\{f, g\}$ в фазовом пространстве импульсов физической системы порождена:

- а) функцией Лагранжа и гамильтоновыми векторными полями X_f и X_g ;
- б) функцией Гамильтона и гамильтоновыми векторными полями X_f и X_g ;
- в) функцией Лагранжа;
- г) функцией Гамильтона;
- д) гамильтоновыми векторными полями X_f и X_g .

5. В четырехмерном линейном пространстве V с базисом $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ задана симплектическая два-форма $\omega = \vec{e}^1 \wedge \vec{e}^2 + \vec{e}^3 \wedge \vec{e}^4$. Укажите тип каждого из подпространств:

- а1) одномерное подпространство с базисным вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$;
- б1) двумерное подпространство с базисными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$;
- в1) двумерное подпространство с базисными векторами $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$;
- г1) трехмерное подпространство с базисными векторами $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ и $\vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

Варианты для соответствия:

- а2) лагранжево;
- б2) симплектическое;
- в2) изотропное не лагранжево;
- г2) коизотропное не лагранжево.

6. На сфере $\mathbb{S}^2$ симплектическая структура задана как два-форма площади, построенная из стандартного вложения сферы в трехмерное евклидово пространство,

(θ, φ) — стандартные сферические координаты на $\mathbb{S}^2$. При соответствующем выборе ориентации $\mathbb{S}^2$ следующие координаты являются координатами Дарбу на открытом множестве $U \subset \mathbb{S}^2$:

- а) $(\theta, \varphi), U = \{0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$;
- б) $(\theta, \varphi), U = \{0 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi\}$;
- в) $(\cos \theta, \varphi), U = \{0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$;
- г) $(\cos \theta, -\varphi), U = \{0 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi\}$;
- д) $(\sin \theta, \varphi), U = \{0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$;
- е) $(\sin \theta, -\varphi), U = \{0 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi\}$.

7. Независимые связи второго рода в симплектическом многообразии задают:

- а) изотропное нелагранжево подмногообразие;
- б) коизотропное нелагранжево подмногообразие;
- в) лагранжево подмногообразие;
- г) симплектическое подмногообразие;
- е) подмногообразие, которое, вообще говоря, не относится ни к одному из типов,

перечисленных в остальных пунктах.

8. В общем случае связи первого рода в симплектическом многообразии задают:

- а) изотропное нелагранжево подмногообразие;
- б) коизотропное подмногообразие;
- в) лагранжево подмногообразие;
- г) симплектическое подмногообразие;
- е) подмногообразие, которое, вообще говоря, не относится ни к одному из типов,

перечисленных в остальных пунктах.

9. Классическая элементарная динамическая система реализуется как симплектическое подмногообразие:

- а) в группе Ли;
- б) в алгебре Ли;
- в) в дуальном пространстве к алгебре Ли;
- г) в линейном расслоении над алгеброй Ли.

10. Импульс релятивистской частицы определяет на фазовом пространстве момент для действия группы:

- а) Галилея;
- б) галилеевских бустов;
- в) вращений;
- г) трансляций.

11. На коприсоединенной орбите группы Пуанкаре, описывающей массивную бесспиновую частицу, следующие величины тождественно равны константам:

- а) четыре-импульс;
- б) квадрат четыре-импульса;
- в) вектор Паули-Любанского;
- г) квадрат вектора Паули-Любанского;
- д) четыре-момент импульса.

12. Следующие условия необходимы для предквантования симплектического многообразия (M, ω) :

- а) существование глобального симплектического потенциала;
- б) целочисленность класса когомологий $\hbar[\omega]$;
- в) существование поляризации;
- г) выполнение условий Бора-Зоммерфельда.

13. Следующие конструкции необходимы для геометрического квантования симплектического многообразия (M, ω) :

- а) существование глобального симплектического потенциала;
- б) существование предквантового расслоения над M ;
- в) существование поляризации;
- г) выполнение условий Бора-Зоммерфельда;
- д) существование нетривиального пространства состояний.

Ключи: 1 б); 2 а), б), е); 3 г); 4 д); 5 а1)-в2), б1)-б2), в1)-а2), г1)-г2); 6 в), г); 7 г); 8 б); 9 в); 10 г); 11 б), в), г); 12 б), в); 13 б), в), д).

5. Информация о разработчиках

Горбунов Иван Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.