

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан

Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальная геометрия

по направлениям подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:

Современная математика и математическое моделирование

Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Теоретическая, вычислительная и экспериментальная механика

Форма обучения

Очная

Квалификация

Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель /

Исследователь в области математики и компьютерных наук

Механик. / Механик. Исследователь

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л.В.Гензе

Председатель УМК

Е.А.Тарасов

Томск – 2024

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

РООПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

РООПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

Ознакомление студентов с важным разделом геометрии, в котором существенно используются многие основные понятия и теоремы математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, тензорного анализа, теории поля.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Третий семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Линейная алгебра».

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 з.е., 180 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Пространственные и плоские кривые

Вектор-функция. Годограф. Теорема о пределе произведения. Дифференцирование вектор-функций. Теорема о дифференцировании произведения. Регулярные кривые.

Натуральный параметр. Касательная прямая и нормальная плоскость пространственной кривой. Репер Френе. Сопровождающий трехгранник. Деривационные формулы репера Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой. Строение кривой в окрестности обыкновенной точки. Эволюта и эвольвента. Огибающая семейства плоских кривых.

Тема 2. Поверхности

Регулярные поверхности. Координатная сеть. Касательная плоскость и нормальная прямая поверхности. Первая квадратичная форма. Геометрический смысл. Вторая квадратичная форма. Геометрический смысл. Нормальная кривизна линий на поверхности. Формула Менье. Индикатриса Дюпена. Оператор Вейнгартена. Матрица оператора. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Омбилические точки. Полная и средняя кривизны линейчатых поверхностей. Сферическое отображение.

Тема 3. Кривые на поверхности, преобразования поверхности.

Линейчатые поверхности. Семейство линий на поверхности. Линии кривизны. Теорема Родрига. Асимптотические линии. Нормальная и геодезическая кривизны. Геодезические линии на поверхности. Изгибание поверхностей. Теорема Гаусса. Деривационные формулы репера поверхности.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Структура экзамена должна соответствовать компетентностной структуре дисциплине. При описании системы оценивания итогового контроля по дисциплине необходимо продемонстрировать достижение всех запланированных индикаторов – результатов обучения.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий РООПК 1.1. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий РООПК 1.3. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит 1 вопрос, проверяющих РООПК 1.2 и оформлен в виде практических задач. Ответ на вопрос третьей части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Вектор-функция. Годограф. Теорема о пределе произведения.
2. Дифференцирование вектор-функций. Теорема о дифференцировании произведения.
3. Регулярные кривые. Натуральный параметр.
4. Касательная прямая. Нормальная плоскость пространственной кривой.
5. Репер Френе. Сопровождающий трехгранник.
6. Деривационные формулы репера Френе.
7. Кривизна и кручение пространственной кривой.
8. Строение кривой в окрестности обыкновенной точки.
9. Эволюта и эвольвента.
10. Огибающая семейства плоских кривых.
11. Регулярные поверхности. Координатная сеть.
12. Касательная плоскость. Нормальная прямая поверхности.
13. Первая квадратичная форма. Геометрический смысл.
14. Вторая квадратичная форма. Геометрический смысл.

15. Линейчатые поверхности.
16. Нормальная кривизна линий на поверхности. Формула Менье.
17. Индикатриса Дюпена.
18. Оператор Вейнгартена. Матрица оператора.
19. Главные направления и главные кривизны.
20. Формула Эйлера.
21. Омбилические точки.
22. Полная и средняя кривизны поверхности.
23. Сферическое отображение.
24. Семейство линий на поверхности.
25. Линии кривизны. Теорема Родрига.
26. Асимптотические линии.
27. Нормальная и геодезическая кривизны.
28. Геодезические линии на поверхности.
29. Изгибание поверхностей. Теорема Гаусса.
30. Дериwационные формулы репера поверхности.

Примеры задач:

1. Написать уравнение касательной и нормали кривой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \\ y = t^2 \end{cases} \text{ в точке } t = 2.$$

2. Составить уравнение эволюты кривой $y = \ln x$.

3. Найти уравнение главной нормали и кривизны кривой $\vec{r} = \left\{ \frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2} \right\}$ в точке

$$M_0 \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right).$$

4. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ параллельные прямой $2x - y + 17 = 0$.

5. Вычислить кривизну кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ в точке $(1, 1)$.

6. Составить уравнение бинормали и определить кручение кривой $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ z = \frac{x^3}{6} \end{cases}$ в точке

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right).$$

7. В какой точке параболы $y = x^2$ касательная образует с осью Ox угол 45° ?

8. Вычислить кручение кривой $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$.

9. На кривой $\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, t\}$ найти точки, в которых главная нормаль перпендикулярна вектору $P = \{1, -1, 3\}$.
10. Написать уравнение касательной и нормали кривой $2x^2 - x^2 y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $(1, -2)$.
11. Найти углы между следующими линиями $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.
12. Доказать, что все главные нормали кривой $\vec{r}(t) = \{t, \sin t, -\cos t\}$ параллельны плоскости YOZ .
13. В какой точке с одной и той же абсциссой касательные к $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?
14. Доказать: соприкасающиеся плоскости кривой $\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$ образуют с координатной плоскостью XOY постоянный угол φ_0 . Найти φ_0 .
15. Составить уравнение эволюты астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
16. Составить уравнение главной нормали и бинормали кривой $\vec{r}(t) = \{t, t^2, e^t\}$ в точке $t = 0$.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=6626>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине:

Регулярные кривые. Натуральный параметр. Касательная прямая и нормальная плоскость пространственной кривой. Репер Френе. Сопровождающий трехгранник. Деривационные формулы репера Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой. Эволюта и эвольвента. Огибающая семейства плоских кривых. Регулярные поверхности. Координатная сеть. Касательная плоскость и нормальная прямая поверхности. Первая квадратичная форма. Геометрический смысл. Вторая квадратичная форма. Геометрический смысл. Нормальная кривизна линий на поверхности. Формула Менье. Индикатриса Дюпена. Оператор Вейнгартена. Матрица оператора. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Омбилические точки. Полная и средняя кривизны линейчатых поверхностей. Линейчатые поверхности. Семейство линий на поверхности. Линии кривизны. Асимптотические линии. Нормальная и геодезическая кривизны. Геодезические линии на поверхности. Изгибание поверхностей.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Изд-во «Лань». -2019г.- 432с.
2. Нордан А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: ЛЕНАНД.-2019г.- 244с.
3. Мищенко А.С., Фоменко А. Курс дифференциальной геометрии. М.: Изд-во «Лань». 2010г.-512с.

б) дополнительная литература:

1. Волобуев И.П., Кубышин Ю.А. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли. М.: Изд-во «Эдиториал УРСС». 1998г. -222с.
2. Щербаков Р.Н., Лучинин А.А. Краткий курс дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во ТГУ.-1974г. -250с.
3. Корякина Е.Е. Пространственные и плоские кривые. Томск: Изд-во ТГУ. – 2013г. – 26с.
4. Корякина Е.Е. Поверхности. Томск: Изд-во ТГУ. – 2016г. – 32с.
5. Корякина Е.Е. Кривые на поверхности. Томск: Изд-во ТГУ. – 2013г. – 34с.

в) ресурсы сети Интернет:

– открытые онлайн-курсы

13. Перечень информационных технологий

информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юра – <https://urait.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Корякина Елена Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент, ТГУ, кафедра геометрии, доцент.