Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Эконометрическое моделирование и стохастические процессы

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

ПК-1. Способен осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-2.3. Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИПК-1.1. Осуществляет проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- коллоквиум.

Задания формулируются по билетам, содержащим один теоретический вопрос и две задачи, призванных оценить усвоение материала на практических занятиях.

Список задач для проведения контрольной работы

1. Доказать, что следующая система множеств является сигма алгеброй:
 - a. Тривиальная сигма-алгебра;
 - b. Сигма-алгебра, порожденная множеством;

- с. Множество всех подмножеств (булеан).
2. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из N элементов.
3. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:
 - а. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$, где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;
 - б. $Y(n)=X(1)*\dots*X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;
 - с. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.
4. Используя неравенство Чебышева обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.
5. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.
6. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка q .
7. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка $AR(1)$ через его шум.
8. Найти дисперсию процесса $AR(1)$.
9. Получить оценки МНК и ММП для параметра гауссовского процесса $AR(1)$.
10. Получить МНК-оценку для $ARCH(1)$ процесса.

Примерный перечень теоретических вопросов на коллоквиум

1. Вопрос 1. Примеры случайных процессов и предельные теоремы.
2. Вопрос 2. Определения условного математического ожидания, мартингалов и их свойства.
3. Вопрос 3. Винеровский процесс. Определение. Свойства и предельные теоремы.
4. Вопрос 4. Линейные процессы авторегрессионного типа с дискретным и непрерывным временем. Примеры, условия устойчивости.
5. Вопрос 5. Примеры оптимальных адаптивных прогнозов линейных стохастических динамических систем с дискретным и непрерывным временем и неизвестными параметрами.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все три вопроса билета.

Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на два вопроса билета.

Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на один вопрос билета

Оценка «Неудовлетворительно» – студента ответил неправильно на все вопросы билета.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в седьмом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть представляет собой тест из 5 вопросов, проверяющих ИУК-1.1. Ответы на вопросы первой части даются путем выбора из списка предложенных.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-2.2. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИПК-3.3 и оформленные в виде практических задач. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Эконометрические модели
2. Модели Крамера-Лундберга
3. Модели финансовой математики
4. Модели (B,S) рынка
5. Модели финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
6. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
7. Винеровский процесс
8. Функционалы от винеровского процесса
9. Доказательство оптимальности в среднеквадратическом смысле условного математического ожидания как одношагового прогноза
10. Прогнозирование динамических систем

Примеры задач:

- Задача 1. Доказать, что мартингал в квадрате есть субмартингал.
- Задача 2. Доказать, что условное математическое ожидание есть оптимальный в среднеквадратическом смысле прогноз.
- Задача 3. Найти корреляционную функцию винеровского процесса и броуновского моста.

Примерный перечень экзаменационных билетов:

Экзаменационный билет № 1

1. Эконометрические модели
2. Распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из N элементов.

Экзаменационный билет № 2

1. Модели Крамера-Лундберга
2. Функционалы от винеровского процесса
3. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.

Экзаменационный билет № 3

1. Модели финансовой математики
2. Доказательство оптимальности в среднеквадратическом смысле условного математического ожидания как одношагового прогноза
3. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка $AR(1)$ через его шум

Экзаменационный билет № 4

1. Модели (B,S) рынка
2. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти дисперсию процесса $AR(1)$.

Экзаменационный билет № 5

1. Эконометрические модели
2. Распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка q .

Экзаменационный билет № 6

1. Модели Крамера-Лундберга
2. Функционалы от винеровского процесса
3. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:
 - a. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$, где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;

- b. $Y(n)=X(1)*\dots*X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;
- c. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.

Экзаменационный билет № 7

1. Модели финансовой математики
2. Доказательство оптимальности в среднеквадратическом смысле условного математического ожидания как одношагового прогноза
3. Используя неравенство Чебышева, обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.

Экзаменационный билет № 8

1. Модели (B,S) рынка
2. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из N элементов.

Критерии оценивания:

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все три вопроса билета.

Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на два вопроса билета.

Оценка «Удовлетворительно» – студент ответил правильно на один вопрос билета

Оценка «Неудовлетворительно» – студента ответил неправильно на все вопросы билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Вариант 1.

1. Выписать стохастические модели эконометрики (AR(p), ARCH(p), AR(p)/ARCH(q)).
2. Выписать одношаговые прогнозы для модели AR(1), оптимальный и адаптивный.

Вариант 2.

1. Записать уравнение скалярного процесса AR(1). Найти условие на начальное значение, когда скалярный устойчивый процесс AR(1) является стационарным.
2. Дать определение винеровского процесса и выписать решение уравнения Орнштейна-Уленбека.

Ответы:

Вариант 1.

№ задания	Ответ к заданию
1	$AR(p): x_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_{k-i} + \sigma_k \xi_k,$ $ARCH(p): x_k = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{k-i}^2} \xi_k,$ $AR(p)/ARCH(q): x_k = x_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_{k-i} + \sigma_k \xi_k, \quad \sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{k-i}^2,$ <p>ξ_k - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = 1$.</p>
2	<p>Оптимальный прогноз $\hat{x}_k = \lambda_1 x_{k-1}$,</p> <p>адаптивный прогноз $\hat{x}_k = \hat{\lambda}_1(k) x_{k-1}$, где $\hat{\lambda}_1(k)$ - оценка МНК неизвестного параметра λ_1, построенная на интервале $[1, k-1]$.</p>

Вариант 2.

№ задания	Ответ к заданию
1	<p>Процесс $AR(1)$: $x_k = \lambda x_{k-1} + \sigma \xi_k$, ξ_k - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = 1$.</p> <p>Условие стационарности $AR(1)$: $\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{1-\lambda^2}$, где $\sigma_0^2 = Ex_0^2$, $Ex_0 = 0$.</p>
2	<p>Винеровский процесс W_t, $t \in [0, T]$ (броуновское движение) – это случайный процесс, удовлетворяющий условиям:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $W_0 = 0$ почти наверное; 2) Процесс W_t имеет независимые приращения; 3) Величины $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ при всех $0 \leq s < t < \infty$, т.е. величины $W_t - W_s$ имеют гауссовское распределение с параметрами 0 и $t-s$. <p>Уравнение Орнштейна-Уленбека имеет вид</p> $dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$ <p>Решение уравнения Орнштейна-Уленбека имеет вид</p> $r_t = r_0 e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s.$

Шкала оценивания остаточных знаний:

Критерий оценивания остаточных знаний	Оценка
Верно решены обе задачи	отлично
В целом верно решены обе задачи, но с недочетами	хорошо
Верно решена одна задача	удовлетворительно
Обе задачи не решены	неудовлетворительно

Информация о разработчиках

Васильев Вячеслав Артурович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.