

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:

Директор

А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Стохастические дифференциальные уравнения

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:

Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

К.И. Лившиц

Председатель УМК

С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

ПК-1. Способен осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-2.3. Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИПК-1.1. Осуществляет проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа.

Список задач для проведения контрольной работы:

1. Доказать, что следующая система множеств является сигма алгеброй:

- a. Тривиальная сигма-алгебра;
- b. Сигма-алгебра, порожденная множеством;
- c. Множество всех подмножеств (булеан).

2. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из

N элементов.

3. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:
 - а. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$, где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;
 - б. $Y(n)=X(1)*\dots*X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;
 - с. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.
4. Используя неравенство Чебышева обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.
5. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.
6. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка q .
7. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка $AR(1)$ через его шум.
8. Найти дисперсию процесса $AR(1)$.
9. Получить оценки МНК и ММП для параметра гауссовского процесса $AR(1)$.
10. Получить МНК-оценку для $ARCH(1)$ процесса.

Примеры билетов на контрольной работе:

БИЛЕТ N 1

1. Стохастический интеграл Ито
2. Доказать, что следующая система множеств является сигма алгеброй:
 - а. Тривиальная сигма-алгебра;
 - б. Сигма-алгебра, порожденная множеством;
 - с. Множество всех подмножеств (булеан).
3. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из N элементов.

БИЛЕТ N 2

1. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем
2. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:
 - а. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$, где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;
 - б. $Y(n)=X(1)*\dots*X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;
 - с. $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$ где $\{X(i)\}$ – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.
3. Используя неравенство Чебышева, обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.

БИЛЕТ N 3

1. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем
2. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.
3. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка q .

БИЛЕТ N 4

1. Модели (B,S) рынка
2. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка $AR(1)$ через его шум.
3. Найти дисперсию процесса $AR(1)$.

БИЛЕТ N 5

1. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
2. Получить оценки МНК и ММП для параметра гауссовского процесса $AR(1)$.
3. Получить МНК-оценку для $ARCH(1)$ процесса

Текущий контроль успеваемости осуществляется выполнением контрольной работы, которая состоит в письменных ответах на три задания билета (один теоретический вопрос и две практические задачи). Критерии оценивания результатов текущей успеваемости следующий:

Оценка «отлично» ставится при полных ответах на все вопросы билета.

Оценка «хорошо» ставится при полных ответах на вопросы билета кроме одного (любого) вопроса.

Оценка «удовлетворительно» ставится при полных ответах на вопросы билета кроме двух (любых) вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится при не ответах на все вопросы билета.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в седьмом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть представляет собой тест из 5 вопросов, проверяющих ИУК-1.1. Ответы на вопросы первой части даются путем выбора из списка предложенных.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-2.2. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИПК-3.3 и оформленные в виде практических задач. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с дискретным и непрерывным временем. Примеры.

Вопрос 2. Гауссовские и условно-гауссовские модели. Определения. Свойства.

Вопрос 3. Определение и свойства броуновского движения.

Вопрос 4. Определение стохастического интеграла по броуновскому движению. Интеграл Ито. Свойства.

Вопрос 5. Методы идентификации процессов с непрерывным временем.

Вопрос 6. Построение оптимальных прогнозов процессов с непрерывным временем.

Примеры задач.

Задача 1. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва.

Задача 2. Разложение броуновского моста на основе теоремы Каруннена-Лоэва.

Задача 3. Построение ОМП параметров линейных стохастических дифференциальных уравнений. Свойства.

Задача 4. Построение оптимальных прогнозов линейных стохастических дифференциальных уравнений. Свойства.

Примерный перечень экзаменационных вопросов:

1. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с дискретным временем.

2. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с непрерывным временем.

3. Гауссовские модели.

4. Условно-гауссовские модели.
5. Модели скользящего среднего.
6. Модели авторегрессии.
7. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего.
8. Авторегрессионная модель условной неоднородности.
9. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва.
10. Стохастический интеграл Ито.
11. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем.
12. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем.
13. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем.
14. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем.
15. Оценивание параметров распределений с тяжелыми хвостами.

Примеры экзаменационных билетов:

Экзаменационный билет № 1

1. Стохастический интеграл Ито
2. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем
3. Оценивание параметров распределений с тяжелыми хвостами

Экзаменационный билет № 2

1. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем
2. Авторегрессионная модель условной неоднородности
3. Гауссовские модели

Экзаменационный билет № 3

1. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего
2. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва
3. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем

Экзаменационный билет № 4

1. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего
2. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва.
3. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится при полных ответах на все вопросы экзаменационного билета.

Оценка «хорошо» ставится при полных ответах на вопросы экзаменационного билета кроме одного (любого) вопроса.

Оценка «удовлетворительно» ставится при полных ответах на вопросы экзаменационного билета кроме двух (любых) вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится при не ответах на все вопросы экзаменационного билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с дискретным временем.
2. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с непрерывным временем.
3. Гауссовские модели.
4. Условно-гауссовские модели.
5. Модели скользящего среднего.
6. Модели авторегрессии.
7. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего.
8. Авторегрессионная модель условной неоднородности.
9. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лозва.
10. Стохастический интеграл Ито.
11. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем.
12. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем.
13. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем.
14. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем.
15. Оценивание параметров распределений с тяжелыми хвостами.

Необходимо дать развёрнутый ответ на один из вопросов, привести основные определения и выводы формул.

Информация о разработчиках

Васильев Вячеслав Артурович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.