

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Математическая статистика

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математическое моделирование и информационные системы

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Основой для оценки текущего контроля являются Критерии оценивания результатов обучения. Задания формулируются по билетам

Билет № 1

1. По реализации выборки $X_1 = 0$, $X_2 = 1,1$, $X_3 = -1,1$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,15.
2. Область $(-1,1)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 9, 15, 12, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные среднее и дисперсию по данным п.1.
4. Найти математическое ожидание и дисперсию выборочного момента k -го порядка.
5. Показать, что выборочное среднее сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины при увеличении объема выборки.

Билет № 2

1. По реализации выборки $X_1 = 0,2$, $X_2 = 1,1$, $X_3 = -1,1$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,25.

2. Область $(-2, 2)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 7, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса по данным п.1.
4. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
5. Доказать асимптотическую нормальность выборочного момента второго порядка.

Билет № 3

1. По реализации выборки $X_1 = 0,3$, $X_2 = 1,3$, $X_3 = -1,3$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,35.
2. Область $(-1, 3)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 9, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Привести пример смещенной оценки.
4. Методом подстановки построить: оценки момента 2-го порядка, коэффициентов асимметрии и эксцесса.
5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Билет № 4

1. По реализации выборки $X_1 = 0,4$, $X_2 = 1,3$, $X_3 = -1,3$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,65.
2. Область $(-1, 4)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 16, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
1. Методом подстановки построить оценки момента 3-го порядка, центрального момента 3-го порядка и вычислить их значения по данным п.1.
2. Доказать сходимость по вероятности эмпирической функции распределения к теоретической.

Билет № 5

1. По реализации выборки $X_1 = 0,5$, $X_2 = 1,4$, $X_3 = -1,4$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,75.
2. Область $(-2, 5)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 12, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
4. Методом подстановки построить оценки коэффициента асимметрии и эксцесса, вычислить их значения по данным п.1.
5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов билета.

Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на четыре вопроса билета.

Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на три вопроса билета

Оценка «Неудовлетворительно» – ответ студента на менее трех вопросов билета.

Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Статистическое оценивание

Статистическое оценивание

Задача 1. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

Задача 2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Задача 3. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

Задача 4. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.25, 0.11, 2.37, 3.45 из нормального закона с дисперсией, равной 0.49. Принять $\gamma=0.96$.

Задача 5. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma=0.98$.

Задача 6. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n=100$ и выборочному среднему равному 10. Принять $\gamma=0.97$.

Задача 7. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:

$$X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3 \\ Y_1=3, Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$$

Задача 8. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона, для параметров равномерного в $[a,b]$ распределения, для параметров нормального распределения.

Проверка статистических гипотез

Задача 9. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Задача 10. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.05$.

Задача 11. При 120 подбрасываниях игральной кости пятерка выпала 25 раз, а шестерка 15 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.01$.

Задача 12. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек.

Уровень значимости $\alpha=0,05$.

Задача 13. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.

Задача 14. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a= 1.2$ и $H_1: a= 2$. Принять уровень значимости $\alpha=0,01$.

Вариант 1

1. В чем отличие теории вероятностей от математической статистики. Задачи математической статистики
2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.
3. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Вариант 2

1. Порядковые статистики;
2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.
3. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:
1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;
2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек. Уровень значимости $\alpha=0,05$.

Вариант 3

1. Эмпирическая функция распределения (э.ф.р.) для одномерной случайной величины;
2. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n=100$ и выборочному среднему, равному 10. Принять $\gamma=0.97$.
3. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.

Вариант 4

1. Общий принцип построения решающих правил.
2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma=0.98$.

Вариант 5

1. Функция информации Фишера; неравенство Рао-Крамера.
2. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона.

3. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a = 1.2$ и $H_1: a = 2$. Принять уровень значимости $\alpha = 0,01$.

Вариант 6

3. Критерий согласия хи-квадрат для простой гипотезы.
4. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n = 100$ и выборочному среднему равному 10. Принять $\gamma = 0.97$.
5. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные – 2, предприятие В: годные – 38, негодные – 3, предприятие С: годные – 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha = 0,1$.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Основой для промежуточной аттестации являются Критерии оценивания результатов обучения. Задания берутся из экзаменационных билетов п.3.2.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов экзаменационного билета.

Оценка «Хорошо» – студент ответил правильно на четыре вопроса экзаменационного билета.

Оценка «Удовлетворительно» – студент ответил правильно на три вопроса экзаменационного билета.

Оценка «Неудовлетворительно» – ответ студента на менее трех вопросов экзаменационного билета.

Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзаменационный билет № 1

1. Вероятностно-статистическая модель и задачи математической статистики.
2. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:
 $X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$
 $Y_1=3, Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -2,-1, 0, 2, 1 из нормального закона. Принять $\gamma = 0.91$.
4. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 31, негодные – 2, предприятие В: годные – 38, негодные – 3, предприятие С: годные – 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha = 0,1$.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,15.

Экзаменационный билет № 2

1. Понятие выборки, статистики, вариационного ряда.
2. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha = 0.05$.
3. По выборке $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = 2$ из нормального закона с дисперсией $\sigma^2 = 4$ построить доверительный интервал для математического ожидания. Уровень доверия $\gamma = 0.9$.
4. Найти достаточную статистику для параметра закона Пуассона.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,25.

Экзаменационный билет № 3

1. Гистограмма, полигон частот. Ядерная оценка плотности.
2. По выборке $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = 2$ из нормального закона с неизвестной дисперсией построить доверительный интервал для математического ожидания. Уровень доверия $\gamma = 0.99$.
3. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:
 $X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$
 $Y_1=3,5, Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$
4. Построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 3, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,35.

Экзаменационный билет № 4

1. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
2. Найти достаточную статистику для параметра закона Пуассона.
3. Построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения
4. По реализации выборки $-1,2; 0,3; 2,4; 3,1$ из нормального закона с дисперсией, равной $0,49$, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a = 1$, $H_1: a = 2$. Принять уровень значимости $\alpha = 0,01$.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 4, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня $0,25$.

Экзаменационный билет № 5

1. Оценки по методу подстановки. Выборочные моменты. Основные свойства оценок.
2. Найти достаточную статистику для параметров нормального закона.
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки $-1, 0, 2, 1$ из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma = 0,98$.
4. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:
 $X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$
 $Y_1=3,1 Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2,5, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня $0,15$.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Список вопросов для оценки остаточных знаний

1. Вероятностно-статистическая модель и задачи математической статистики.
2. Понятие выборки, статистики, вариационного ряда.
3. Гистограмма, полигон частот. Ядерная оценка плотности.
4. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
5. Оценки по методу подстановки. Выборочные моменты. Основные свойства оценок.

Информация о разработчиках

Дмитриев Юрий Глебович, д-р физ.-мат. наук, доцент, кафедра системного анализа и математического моделирования, профессор.