Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Топология

по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование
Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь
Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель /
Исследователь в области математики и компьютерных наук

Год приема
2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: индивидуальные задания.

Инд. задание №1 (РООПК-1.1, РООПК-1.2, РООПК-1.3):

1. Определяют ли приведенные ниже описания топологию на множестве X? Если да, то каким аксиомам отделимости она удовлетворяет?

а) $X = \mathbb{N}$. Открытыми объявляются $\emptyset, X$ и все множества в X, содержащие в себе множество $I_n = \{k \in X; k \geq n\}$ для некоторого n.

б) X=$\mathbb{R}$. Для $x \in \mathbb{R}$ ф.с.о. : $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (0, \varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$.

в) X=$\mathbb{R}$. Для $x \in \mathbb{R}$ ф.с.о. : $(x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$.

г) X=$\mathbb{R}$. Для $x \in \mathbb{R}$ ф.с.о. : $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (1/\varepsilon, \infty)$, $\forall \varepsilon > 0$.

д) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Для $(x_0, y_0) \in X$ ф.с.о. состоит из множества $\{(x_0, y_0)\}$, если $y_0 > 0$, и оно состоит из множеств $\{(x,y) \in X; (x-x_0)^2 + (y-\varepsilon)^2 \leq \varepsilon^2\}$, если $y_0 = 0$, где $\varepsilon > 0$.

2. Для точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ положим $U_\varepsilon(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0 - \varepsilon)^2 < \varepsilon^2\} \cup \{(x_0, y_0)\}$. Если $y_0 \neq 0$, то ф.с.о. точки (x_0, y_0) составляют множества $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ $\forall \varepsilon > 0$, и множества $V_\varepsilon(x_0, 0) = U_\varepsilon(x_0, 0) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < -\Delta\}, \forall \varepsilon > 0\ \forall \Delta > 0$ – в оставшихся случаях. Найти замыкание, внутренность и границу следующих множеств:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, -1 < y < 1\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -|y| < x < |y|\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 1\}.$$

3. Пусть $\tau_б$ и $\tau_г$ – топологии на $\mathbb{R}$ из пунктов б и г задачи 1 соответственно. На каждом из следующих множеств

$$A = \mathbb{N}, \qquad B = \{-1, -2, -3, \cdots\}, \qquad C = \mathbb{N} \cup \{1/2, 1/3, 1/4, \cdots\}$$

рассмотреть индуцированные топологии и сравнить их между собой.

4. Доказать, что для любого множества A в топологическом пространстве выполнено равенство $\mathrm{Int}\overline{A} = \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}\overline{A}})$.

Инд. задание №2 (РООПК-1.1, РООПК-1.2, РООПК-1.3):

Найти все точки непрерывности функций:

$$f(x) = \sin x : \mathbb{R}_6^+ \to \mathbb{R}_4^+ \ ; \quad f(x) = \mathrm{tg}\, \pi x : \mathbb{R}_4^- \to \mathbb{R}_6^-;$$

$$f(x) = x^2 + 1 : \mathbb{R}_7 \to \mathbb{R}_8.$$

- $\mathbb{R}_4^+$ – ф.с.о. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (\Delta, \infty), \forall \Delta \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$.
- $\mathbb{R}_4^-$ – ф.с.о. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (-\infty, \Delta), \forall \Delta \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$.
- $\mathbb{R}_6^+$ – ф.с.о. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (0, \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.
- $\mathbb{R}_6^-$ – ф.с.о. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (-\varepsilon, 0), \forall \varepsilon > 0$.
- $\mathbb{R}_7$ – ф.с.о. $\{x\}$, если x рационально и $(x-\varepsilon, x+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$, если x иррационально.
- $\mathbb{R}_8$ – ф.с.о. $\{x\}$, если x иррационально и $(x-\varepsilon, x+\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$, если x – рационально.

Инд. задание №3 (РООПК-1.1, РООПК-1.2, РООПК-1.3):

1. Для точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ф.с.о. : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = y_0, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$, $\forall\varepsilon > 0$, если $y_0 \neq 0$, и множества $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$, $\forall\varepsilon > 0$, если $y_0 = 0$.

а) сепарабельно ли $\mathbb{R}^2$ с этой топологией?

б) сепарабельна ли верхняя полуплоскость $y > 0$ с этой топологией?

в) сепарабельны ли множества $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ и $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ как подпространства $\mathbb{R}^2$ с этой топологией?

2. Для точки $x_0 \in \mathbb{R}$ ф.с.о. составляют множества $\{x_0\} \cup (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$, если $x_0 \neq 0$ и множества $(-\varepsilon, \varepsilon) \cup \{a\}$, $\forall\varepsilon > 0, \forall a \neq 0$, если $x_0 = 0$.

а) имеет ли $\mathbb{R}$ с этой топологией счетную базу?

б) имеется ли счетная база в подпространстве $(1, \infty)$?

в) удовлетворяет ли $\mathbb{R}$ с этой топологией 1-ой аксиоме счетности?

3. Проверить гомеоморфность следующих подпространств в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}^2$ с обычной евклидовой топологией:

$X_1 \simeq X_2, X_2 \simeq X_3, X_3 \simeq X_4, X_1 \simeq X_4, X_5 \simeq X_6, X_6 \simeq X_7, X_7 \simeq X_8, X_8 \simeq X_9$

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \{1, 1/2, 1/3, \cdots\},\\
&X_2 = \{1, 1/2, 1/3, \cdots; 0, -1/2, -1/3, -1/4, \cdots; -1\},\\
&X_3 = \{1, 1/2, 1/3, \cdots; 0, -1/2, -2/3, -1/4, \cdots; -1\},\\
&X_4 = \{1, 1/2, 1/3, \cdots; 2, 3, 4, \cdots\},\\
&X_5 = [0, 1) \cup [2, 3),\\
&X_6 = [-1, 1] \backslash \{0\},\\
&X_7 = [0, 1) \cup (1, 2),\\
&X_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1\},\\
&X_9 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}
\end{aligned}
$$

Инд. задание №4 (РООПК-1.1, РООПК-1.2, РООПК-1.3):

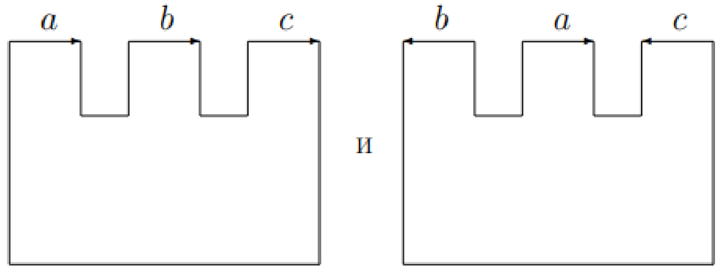
1. Какой поверхности соответсвует слово:

$$a)\quad abca^{-1}b^{-1}c? \qquad)\quad a_1a_2\cdots a_na_n\cdots a_1?$$

2. Разверткой какой поверхности без края (при условии приклеивания необходимого количества круглых дисков) является следующая фигура:

а)

б)



3. Доказать, что выпуклый многогранник, не имеющий ни четырехугольных, ни пятиугольных граней, обязан иметь не менее четырех треугольных граней.

Критерии оценивания:

Индивидуальное задание считается решеным, если в результате решения задачи получен правильный ответ.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов. Теоретические вопросы проверяют РООПК 1.1, 1.2 и 1.3.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Определение топологии. Открытые и замкнутые множества.
2. Фундаментальные системы окрестностей.
3. Теорема Куратовского.
4. Замыкание, внутренность и граница.
5. Сравнение топологий.
6. Озера Вада.
7. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы.
8. Подпространства.
9. Аксиомы отделимости. Примеры.
10. Плоскости Немыцкого.
11. Нормальность метрических пространств.
12. Сепарабельность и свойство Суслина. Примеры.
13. Первая и вторая аксиома счетности. Примеры.
14. Пространство R[a,b].

15. Эквивалентность сепарабельности, свойства Суслина и второй аксиомы счетности. для метрических пространств
16. Компактные пространства.
17. Связные пространства.
18. Факторпространства.
19. Теорема о классификации поверхностей (двухсторонний случай).
20. Теорема о классификации поверхностей (односторонний случай).
21. Эквивадентность ручки и листов Мебиуса в присутствии листа Мебиуса.
22. Бутылка Клейна
23. Проективная плоскость.
24. Теорема (лемма) Урысона.
25. Теорема Титце-Урысона.
26. Теорема Титце-Урысона для произвольных промежутков.
27. Теорема П.С. Александрова.
28. Центрированные системы и компактность.
29. Произведения.
30. Теорема Тихонова.
31. Канторово множество как топологическое произведение.
32. Свойства канторова множества.
33. Канторово множество и мера.
34. Ожерелье Антуана
35. «Дикая сфера», «рогатая сфера Александера».
36. «Канторова лестница».
37. Кривая Пеано.
38. Гомотопия и теорема о «склейке».
39. Гомотопные пространства.
40. Фундаментальная группа.
41. Свойства фундаментальной группы.
42. Фундаментальная группа окружности.
43. Теорема о «барабане».
44. Теорема Брауэра.

Критерии оценивания:
Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».
Студент имеет право проходить промежуточную аттестацию вне зависимости от результатов текущей успеваемости, но необходимым условием получения оценки не ниже «удовлетворительно» является наличие всех правильно решенных индивидуальных домашних заданий.
Сама оценка за экзамен складывается из баллов за теоретические вопросы (от 0 до 2 баллов).

Сумма баллов	Оценка
4	Отлично
3	Хорошо
2	Удовлетворительно
1	Неудовлетворительно
0	Неудовлетворительно

Баллы за теоретический вопрос	Критерии соответствия
2	студент ответил на вопрос без принципиальных ошибок и существенных пробелов в доказательствах и рассуждениях
1	в целом дан правильный ответ на вопрос, но доказательства содержат неточности или не полностью изложены
0	ответ отсутствует или представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний могут быть использованы для формирования программы ГИА (программы государственного экзамена), а также экспертом Рособрнадзора при проведении проверки диагностической работы по оценки уровня форсированности компетенций обучающихся (при контрольно-надзорной проверке). Вопросы данного раздела показывают вклад дисциплины в образовательный результат образовательной программы. Объем заданий в данном разделе зависит как от количества формируемых индикаторов достижения компетенций, так и от объема дисциплины по учебному плану.

Тест (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3). При проведении теста можно пользоваться источниками из списка учебной литературы в РПД.

Пояснение: Может быть несколько правильных ответов.

Вопрос 1

1. Будет ли введена топология на прямой, если для $x \in \mathbb{R}$ определить фундаментальную систему окрестностей следующим образом: $[x, x+\varepsilon) \cup (a, +\infty)$; $\forall \varepsilon > 0, \forall a > 0$.
2. Будет ли введена топология на прямой, если для $x \in \mathbb{R}$ определить фундаментальную систему окрестностей следующим образом: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (0, \varepsilon)$; $\forall \varepsilon > 0$.
3. Будет ли введена топология на прямой, если для $x \in \mathbb{R}$ определить фундаментальную систему окрестностей следующим образом: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon]$; $\forall \varepsilon > 0$.
4. Будет ли введена топология на прямой, если для $x \in \mathbb{R}$ определить фундаментальную систему окрестностей следующим образом: $[x, x+\varepsilon) \backslash \{x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{3}, \dots\}; \forall \varepsilon > 0$.

Правильный ответ: 1,2,4.

Вопрос 2

1. Будет ли выполнена аксиома отделимости T_0 на прямой $\mathbb{R}$ с топологией, которую задает ф.с.о.:$[x, x+\varepsilon) \cup [\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$?.

2. Будет ли выполнена аксиома отделимости T_1 на прямой $\mathbb{R}$ с топологией, которую задает ф.с.о.:$[x, x+\varepsilon) \cup [\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$?

3. Будет ли выполнена аксиома отделимости T_2 на прямой $\mathbb{R}$ с топологией, которую задает ф.с.о.:$[x, x+\varepsilon) \cup [\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$?

4. Будет ли выполнена аксиома отделимости T_3 на прямой $\mathbb{R}$ с топологией, которую задает ф.с.о.:$[x, x+\varepsilon) \cup [\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$?

Правильный ответ: 1, 2.

Вопрос 3

1. Найти замыкание множества $A = (0,2)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.
2. Найти замыкание множества $A = (-1,2)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.

3. Найти замыкание множества $A = (0,2]$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.

4. Найти замыкание множества $A = [0,3)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.
Правильный ответ: 1) [0,2), 2) [−1,2), 3) [0,2], 4) [0,3).

Вопрос 4
1. Найти внутренность множества $A = [0,2]$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.:$(x-\varepsilon, x]$, $\forall\varepsilon > 0$.
2. Найти внутренность множества $A = (-1,2]$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.:$(x-\varepsilon, x]$, $\forall\varepsilon > 0$.
3. Найти внутренность множества $A = [0,2)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.:$(x-\varepsilon, x]$, $\forall\varepsilon > 0$.
4. Найти внутренность множества $A = (0,3)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.:$(x-\varepsilon, x]$, $\forall\varepsilon > 0$.
Правильный ответ: 1) (0,2], 2) (−1,2], 3) (0,2), 4) (0,3).

Вопрос 5
1. Найти границу множества $A = (0,2)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.
2. Найти границу множества $A = (-1,2)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.

3. Найти границу множества $A = (0,2]$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.

4. Найти границу множества $A = [0,3)$ на вещественной прямой с топологией, определяемой ф.с.о.: $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$.
Правильный ответ: 1) {0}, 2){−1}, 3) {0,2}, 4) {3}.

Вопрос 6
Пусть τ_1 – топология на $\mathbb{R}$, порожденная ф.с.о. вида $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (0,\varepsilon)$; $\forall\varepsilon > 0$, для каждого $x \in \mathbb{R}$, τ_2 – топология на $\mathbb{R}$, порожденная ф.с.о. вида $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$, $\forall\varepsilon > 0$, для каждого $x \in \mathbb{R}$. На множестве $A = \{-1, -2, \ldots\}$ рассмотреть индуцированные топологии и сравнить их.
Выберите правильное утверждение:
1. τ_1 сильнее τ_2,
2. τ_2 сильнее τ_1,
3. $\tau_1 = \tau_2$,
4. τ_1 и τ_2 несравнимы.
Правильный ответ: 1.

Вопрос 7
Пусть пространство $\mathbb{R}$ наделено топологией, в которой ф.с.о. точки x составляют множества $\{x\} \cup (-\varepsilon, 0) \cup (a, +\infty), \forall\varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R}$. Какие из следующих подпространств являются сепарабельными?
1. $\mathbb{R}$.

2. [0,1].
3. $[-1,1]$.
4. $\mathbb{R}\backslash[-1,+\infty)$
Правильный ответ: 1,3.

Вопрос 8
Пусть $f(x) = x^2$ будет обычная парабола, которую мы рассмотрим как отображение вещественной прямой с топологией с ф.с.о. $[x, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$, в вещественную прямую с ф.с.о. $(x-\varepsilon, x]$, $\forall\varepsilon > 0$, Является ли следующее множество множеством точек непрерывности функции $f(x)$?
1. $\mathbb{R}$.
2. $(-\infty, 0)$.
3. $(0, +\infty)$.
4. $(-\infty, 0]$.
5. $[0, +\infty)$.
Правильный ответ: 2

Вопрос 9
Какая из букв: б, в, г, д является гомеоморфной букве «е»?
1. б.
2. в.
3. г.
4. д.
Правильный ответ: 1,4.

Вопрос 10
Будет ли образовывать топологию на вещественной прямой следующее семейство множеств
1. $\emptyset, \mathbb{R}$ и все множества вида $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$, $\forall a > 0$?
2. $\emptyset, \mathbb{R}$ и все множества вида $(-\infty, a] \cup [a, +\infty)$, $\forall a > 0$?
3. $\emptyset, \mathbb{R}$ и все множества вида $(-\infty, a) \cup [a, +\infty)$, $\forall a > 0$?
4. $\emptyset, \mathbb{R}$ и все множества вида $(-\infty, a] \cup (a, +\infty)$, $\forall a > 0$?
Правильный ответ: 1.

Вопрос 11.
Являются ли гомеоморфными следующие подпространства вещественной прямой:
1. $X_1 = [0,1) \cup [2,3)$ и $X_2 = [-1,1]\backslash\{0\}$?
2. $X_1 = [0,1) \cup [2,3)$ и $X_2 = [0,1) \cup (1,2)$?
3. $X_1 = [0,1) \cup [2,3)$ и $X_2 = (0,1) \cup (1,2)$?
4. $X_1 = [0,1) \cup [2,3)$ и $X_2 = [0,1] \cup (1,2)$?
Правильный ответ: 1. да, 2-4. Нет.

Вопрос 12.
Будет ли хаусдорфовым пространство
1. в котором ф.с.о.:$(-2\varepsilon, x-\varepsilon) \cup (x-\varepsilon, x]$, $\forall\varepsilon > 0$?
2. в котором ф.с.о.:$(-\infty, \frac{1}{\varepsilon}) \cup (x-\varepsilon, x]$, $\forall\varepsilon > 0$?
3. в котором ф.с.о.:$(-\infty, \frac{1}{\varepsilon}) \cup (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$?
4. в котором ф.с.о $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup (x+\varepsilon, x+2\varepsilon)$, $\forall\varepsilon > 0$?
Правильный ответ: 1,4

Вопрос 13.

Будет ли регулярным пространство
1. в котором ф.с.о.:$[x, x+\varepsilon)\backslash\{x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{3}, \ldots\}; \forall\varepsilon>0$?
2. в котором ф.с.о.:$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\backslash\{x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{3}, \ldots\}; \forall\varepsilon>0, \forall\varepsilon>0$?
3. в котором ф.с.о.:$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\backslash\{x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{3}, \ldots\}, \forall\varepsilon>0$?
4. в котором ф.с.о $(x-\varepsilon, x]\backslash\{x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{3}, \ldots\}, , \forall\varepsilon>0$?
Правильный ответ: не будут.

Вопрос 14
Какой поверхности соответствует слово:
1.$abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$?
2. $abca^{-1}bc^{-1}$?
3. $abca^{-1}bc$?
4. $abcabc$?
Правильный ответ: 1. Сфера с одной ручкой. 2. Сфера с 3 листами Мебиуса. 3. Сфера с 2 листами Мебиуса. 4. Сфера с 1 листом Мебиуса.

Информация о разработчиках

Гулько Сергей Порфирьевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор каф. математического анализа и теории функций.

Гензе Леонид Владимирович, к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа и теории функций.