Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Теория массового обслуживания

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

ПК-1. Способен осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

ИПК-1.1. Осуществляет проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа;

– домашние работы.

Домашние задания представляют собой задачи по темам, изучаемым в курсе лекций и рассматриваемых на практических занятиях, проверяют ИОПК-3.4 и ИПК-1.1.

Пример

Задача по Теме 1. Посетители приходят в ресторан в соответствии с пуассоновским потоком со средней частотой 20 посетителей в час. Ресторан открывается в 11:00. Найти:

а) вероятность того, что в 11:12 в ресторане окажется 20 посетителей при условии, что в 11:07 в ресторане было 18 посетителей;

б) вероятность того, что новый посетитель прибудет в ресторан в интервале между 11:28 и 11:30, если известно, что предыдущий посетитель прибыл в ресторан в 11:25.

Критерии оценивания

Домашнее задание считается выполненным, если решены все его задачи.

Задача считается выполненной, если получен правильный ответ, использованы верные формулы и подходы для решения, обучающийся свободно отвечает на вопросы относительно хода решения.

Контрольная работа 1 (ИОПК-3.4, ИПК-1.1)

Контрольная работа состоит из 1 задачи.

Пример задачи

Продукция берется со склада, вмещающего 80 единиц складируемой продукции, в соответствии с пуассоновским потоком с интенсивностью 5 единиц продукции вдень.

Найти:

а) вероятность того, что в течение первых двух дней со склада будет взято 10 единиц продукции;

б) вероятность того, что к концу четвертого дня на складе не останется ни одной единицы продукции.

Контрольная работа 2 (ИОПК-3.4, ИПК-1.1)

Контрольная работа состоит из 1 задачи.

Пример задачи

На станцию поступает в среднем 1,2 телефонных вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора составляет 30 секунд. Составить модель в виде одноканальной СМО с отказами, найти ее основные характеристики и оценить эффективность ее работы.

Ответ: вероятность успешного обслуживания = 0,625, вероятность отказа = 0, 375 (обслуживается лишь 62,5% звонков); абсолютная пропускная способность = 0,75 (звонков в минуту).

Критерии оценивания:

Результаты контрольных работ определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» за каждую контрольную работу выставляется, если задача решена без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если в задаче имеются существенные вычислительные ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если при решении задачи допущены незначительные ошибки в выборе подхода, формул вычисления, либо при выводе формул и подстановке данных.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если при решении задачи допущены грубые ошибки или задача не решена.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-3.1. Ответ на вопрос дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит задачу, проверяющую ИОПК-3.2. Ответ должен содержать вывод необходимых формул и результаты численного расчета.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-3.3. Ответ на вопрос дается в развернутой форме.

Часть 1. Перечень теоретических вопросов:

1. Составить уравнение для исследования MMPP-потока методом производящих функций.
2. Составить уравнение для исследования MMPP-потока методом характеристических функций.
3. Составить уравнение для исследования MAP-потока методом производящих функций.
4. Составить уравнение для исследования MAP-потока методом характеристических функций.
5. Составить уравнение для исследования синхронного MAP-потока методом производящих функций.

6. Составить уравнение для исследования синхронного MAP-потока методом характеристических функций.
7. Составить уравнение для исследования рекуррентного потока фазового типа с репродуктивным состоянием «2» методом производящих функций.
8. Составить уравнение для исследования рекуррентного потока фазового типа с репродуктивным состоянием «2» методом характеристических функций.
9. Составить уравнение для исследования полумарковского потока фазового типа с репродуктивными состояниями «1» и «2» методом производящих функций.
10. Составить уравнение для исследования нестационарного пуассоновского потока событий методом производящих функций.
11. Составить уравнение для исследования нестационарного пуассоновского потока событий методом характеристических функций.
12. Просеивание простейшего потока событий.
13. Суммирование простейших потоков событий.
14. Составить уравнение для исследования неординарного пуассоновского потока методом производящих функций.
15. Составить уравнение для исследования неординарного пуассоновского потока методом характеристических функций.
16. Поток Эрланга: определить математическое ожидание, дисперсию, коэффициент вариации распределения Эрланга k-го порядка.
17. Гиперэкспоненциальный поток: определить математическое ожидание, дисперсию, коэффициент вариации гиперэкспоненциального распределения k-го порядка.

Часть 2. Примеры задач:

1. Интенсивность нестационарного пуассоновского потока событий $\lambda(t) = 5 - e^{1-0.5t}$, найти среднее число наступивших событий за интервал времени (5, 10).
2. Оператор базы данных обслуживает потоки заявок от 5 организаций. Поступление заявок от каждой организации является простейшим потоком событий с интенсивностями равными соответственно 1, 2, 3, 4, 5 заявок в час. Найти вероятность поступления ровно одной заявки суммарного потока в течение 4 минут, а также вероятность того, что поступившая заявка принадлежит потоку с наибольшей или наименьшей интенсивностью.

Часть 3. Перечень теоретических вопросов:

Общее задание: «Составить описание модели, составить список событий и/или граф переходов, записать уравнения Колмогорова, выполнить исследование в указанном режиме, рассчитать характеристики производительности». Модели по вариантам:

1. Система M/M/1/0, нестационарный режим.
2. Система M/M/1/0, стационарный режим.
3. Система M/M/1/0 с приоритетными заявками, нестационарный режим.
4. Система M/M/1/0 с приоритетными заявками, стационарный режим
5. Система M/M/1/1, нестационарный режим.
6. Система M/M/1/1, стационарный режим.
7. Система M/M/1/1 с относительными приоритетами, нестационарный режим.
8. Система M/M/1/1 с относительными приоритетами, стационарный режим.
9. Система M/M/1/∞, стационарный режим.
10. Система M/M/1/c, стационарный режим.
11. Система M/M/n/c, стационарный режим.
12. Система M/M/∞, нестационарный режим.
13. Система M/M/∞, стационарный режим.

14. Система M(t)/M/∞.
15. Система M^k/M/∞ (неординарный входящий поток), нестационарный режим.
16. Система M^k/M/∞ (неординарный входящий поток), стационарный режим.
17. Система M/M/1/∞ с нетерпеливыми заявками, стационарный режим.
18. Система M/M/1/0 с повторным обслуживанием, стационарный режим.
19. RQ-система M/M/1 со статическим протоколом случайного доступа.
20. RQ-система M/M/1 с динамическим протоколом случайного доступа.
21. Замкнутая двухфазная СМО с экспоненциальным обслуживанием.
22. Открытая двухфазная СМО с простейшим входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием.

Критерии оценивания:

Результаты зачета с оценкой определяются при набранном в течение семестра минимуме баллов в соответствии с таблицей.

Вид работы	Удельный вес	Период	Критерии оценки
Контрольные работы	50	В течение 8 семестра	Оценка проставляется в зависимости от письменного ответа на теоретический вопрос и количества правильно решенных практических задач
Зачет	50	В конце 8 семестра	Оценка определяется степенью полноты и правильности ответов на теоретические вопросы экзаменационного билета и

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

60-70 баллов соответствуют оценке «удовлетворительно», 70-90 – «хорошо», 90-100 – «отлично».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Рассмотрим бесконечнолинейную систему массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок, обслуживание экспоненциальное с параметром μ. Пусть случайный процесс $i(t)$ – число заявок в системе, то есть число приборов, занятых в момент времени t.

1. Случайный процесс $i(t)$:
а) является цепью Маркова с дискретным временем;
б) является цепью Маркова с непрерывным временем;
в) не является марковским процессом.

Для исследования рассматриваемой СМО составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для следующего распределения вероятностей:

$$P_i(t) = P\{i(t) = i\}.$$

2. По формуле полной вероятности запишем допредельные равенства (вероятности $P_i(t+\Delta t)$ в момент времени $t+\Delta t$ выражаются через вероятности $P_i(t)$ в момент времени t и вероятности переходов в состояние i за бесконечно малый промежуток времени Δt):

а) $P_i(t+\Delta t)=\lambda\Delta t P_{i-1}(t)+[1-(\lambda+\mu)\Delta t]P_i(t)+\mu\Delta t P_{i+1}(t)+o(\Delta t),\ i\geq 1,$

$P_0(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)P_0(t)+\mu\Delta t P_1(t)+o(\Delta t);$

б) $P_i(t+\Delta t)=\lambda\Delta t P_{i-1}(t)+[1-(\lambda+i\mu)\Delta t]P_i(t)+(i+1)\mu\Delta t P_{i+1}(t)+o(\Delta t),\ i\geq 1,$

$P_0(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)P_0(t)+\mu\Delta t P_1(t)+o(\Delta t);$

в) $P_i(t+\Delta t)=(i-1)\lambda\Delta t P_{i-1}(t)+[1-i(\lambda+\mu)\Delta t]P_i(t)+(i+1)\mu\Delta t P_{i+1}(t)+o(\Delta t),\ i\geq 1,$

$P_0(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)P_0(t)+\mu\Delta t P_1(t)+o(\Delta t).$

3. Затем от полученных допредельных равенств переходим к пределу при $\Delta t\to 0$ и получаем систему:

а) $P_i'(t)=\lambda P_{i-1}(t)+[1-(\lambda+\mu)]P_i(t)+\mu P_{i+1}(t),\ i\geq 1,$

$P_0'(t)=(1-\lambda)P_0(t)+\mu P_1(t);$

б) $P_i'(t)=(i-1)\lambda P_{i-1}(t)-i(\lambda+\mu)P_i(t)+(i+1)\mu P_{i+1}(t),\ i\geq 1,$

$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t);$

в) $P_i'(t)=\lambda P_{i-1}(t)-(\lambda+i\mu)P_i(t)+(i+1)\mu P_{i+1}(t),\ i\geq 1,$

$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t).$

Для однозначного решения полученной системы необходимо задать начальные условия.

4. Рассмотрим случай, когда в момент времени $t=0$ система пуста, то есть все приборы свободны. Тогда начальные условия имеют вид:

а) $P_i(0)=\begin{cases}1, \text{если } i=0,\\ 0, \text{если } i>0.\end{cases};$

б) $P_i(0)=\begin{cases}0, \text{если } i=0,\\ 1, \text{если } i>0.\end{cases};$

в) $P_i(0)=\begin{cases}1, \text{если } i=1,\\ 0, \text{если } i\neq 1.\end{cases}.$

Определим производящую функцию:

$$F(z,t)=\sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(t).$$

5. Из предложенных ниже выберите равенства, которые справедливы для производящей функции $F(z,t)$:

а) $F(z,0)=1;$

б) $\sum_{i=1}^{\infty} z^i P_{i-1}(t)=F(z,t);$

в) $\sum_{i=1}^{\infty} i z^i P_i(t)=z\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z};$

г) $F(z,0)=0;$

д) $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i P_{i+1}(t)=\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z};$

е) $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i P_{i+1}(t)=z\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z};$

ж) $\sum_{i=1}^{\infty} z^i P_{i-1}(t)=zF(z,t);$

з) $\sum_{i=1}^{\infty} i z^i P_i(t)=\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z}.$

6. Следовательно, из системы дифференциальных уравнений относительно $P_i(t)$, можно получить дифференциальное уравнение для производящей функции в виде:

а) $\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}+\mu(1-z)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=\lambda(z-1)F(z,t)$;

б) $\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}+\mu(z-1)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=\lambda(z-1)F(z,t)$;

в) $\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}-\mu(1-z)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=\lambda(1-z)F(z,t)$.

7. Решение полученного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с учетом начального условия (иными словами, производящая функция $F(z,t)$) имеет вид:

а) $F(z,t)=e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\left(1-e^{\mu t}\right)}$; б) $F(z,t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)\left(e^{-\mu t}-1\right)}$; в) $F(z,t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)\left(1-e^{-\mu t}\right)}$.

8. Разлагая эту функцию в ряд по степеням z^i, найдем вероятности $P_i(t)$:

а) $P_i(t)=\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)\right]^i}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)}$;

б) $P_i(t)=\frac{\left[-\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{\mu t}\right)\right]^i}{i!}e^{\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{\mu t}\right)}$;

в) $P_i(t)=\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(e^{-\mu t}-1\right)\right]^i}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(e^{-\mu t}-1\right)}$.

9. Следовательно, распределение является:
а) экспоненциальным;
б) геометрическим;
в) пуассоновским;
с параметром _____.

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ к заданию
1	б
2	б
3	в
4	а
5	а, в, д, ж
6	б
7	в
8	а
9	в, $\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)$

За каждый правильный ответ студент получает 1 балл. Таким образом, максимальное количество баллов – 13.

Критерий оценивания остаточных знаний	Оценка
Количество баллов 12-13	отлично
Количество баллов 9-11	хорошо
Количество баллов 6-8	удовлетворительно
Количество баллов меньше 5	неудовлетворительно

Информация о разработчиках

Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ,

Невенченко Екатерина Алексеевна, ассистент кафедры теории вероятностей и математической статистики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.