Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Математический анализ

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
Фундаментальная физика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
О.Н. Чайковская

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля.

По дисциплине «Математический анализ» предусмотрено проведения контрольных работ, самостоятельных работ, индивидуальных работ, коллоквиумов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий (ИОПК 1.1). Результат текущего контроля фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Темы практических занятий:

1 семестр.

1. Комбинаторика и бином Ньютона.
2. Множества. Операции над множествами
3. Отображение, функция. Образ, прообраз
4. Построение графиков функций элементарными средствами. Основные элементарные функции.
5. Композиция функций, обратная функция
6. Числовые множества. Точные грани.
7. Параметрические кривые – функции и не функции
8. Метод математической индукции
9. Метод математической индукции.

Самостоятельная работа №1: множества, отображения, матем. индукция.

Примерный вариант самостоятельной работы 1:

ВАРИАНТ 30

1. Доказать: $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$, $n\in\mathbf{N}$
2. Доказать по определению, что для любых множеств A,B,C верно: $A\setminus(B\cup C)\subset((A\cup B)\setminus C)\setminus(A\cap B)$
3. Построить график и задать отображение f. Является ли это отображение инъекцией, сюръекцией? $f(x)=\sqrt{1-x}$. Найти $f(\mathbf{R})$, $f^{-1}([-3;0])$.
4. Задать $f\circ g$, $g\circ f$, если $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=2x$.

10. Предел последовательности – определение
11. Предел последовательности №58-66 из задачника Демидовича с разбором
12. Нахождение пределов с использованием теорем об арифметических действиях
13. Нахождение пределов. Т. о трех последовательностях.
14. Предел монотонной последовательности. Число е. Критерий Коши.
15. ***Контрольная работа №1. Предел последовательности***

Примерный вариант контрольной работы № 1:

ВАРИАНТ 29

1. Доказать по определению: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n^2}{n^2+1}\right)=10$ ИЛИ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n}=+\infty$

Найти пределы:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n n+n^2}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-n^3}{n^2+2^n}$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+5}\right)$ **5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{3n-1}$

Исследовать последовательности на сходимость:

6. $x_n=(2^{\cos\frac{\pi n}{2}})\cdot\dfrac{1}{n}$ ИЛИ $x_n=(2^{\cos\frac{\pi n}{2}})\cdot\dfrac{n+1}{n}$

7. $x_n=\left(1-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{3}{2n}\right)$ ИЛИ

$x_n=\lg 1+\dfrac{\lg 2}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{\lg 3}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{\lg n}{\sqrt[3]{n}}$ ИЛИ $x_n=\sin 1+\dfrac{\sin 2}{2^3}+\dfrac{\sin 3}{3^3}+\ldots+\dfrac{\sin n}{n^3}$

16. Предел функции – определения Коши и Гейне
17. Различные виды пределов
18. Нахождение пределов функций (первый замечательный предел)
19. Нахождение пределов функций (второй замечательный предел)
20. О-символика.
21. Непрерывность. Точки разрыва.
22. ***Контрольная работа №2. Предел и непрерывность функции***

Примерный вариант контрольной работы № 2:

ВАРИАНТ 25

1.Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{-x}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^x=?$ 3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{x^4-x-78}=?$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x-\sin 7x}=?$ 5. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{-1/x^2}=?$

6. Доказать: при $x\to+\infty\; x^2+x\ln^{10}x\sim x^2$.

7. Точки разрыва, их род: $f(x)=\left(x^2-9\right)\cdot\left(x^2-2x-3\right)^{-1}$

23. Производная – по определению.
24. Первый дифференциал. Касательная. Техника дифференцирования.
25. Техника дифференцирования.
26. Правило Лопиталя.
27. Пр. Лопиталя.

Самостоятельная работа №2: производная и правило Лопиталя

Примерный вариант самостоятельной работы № 2:

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$
2. Найти производную от функции: $f(x)=(2-\cos(x))^{\sin(x)}$

28. Формула Тейлора
29. Исследование функции – пределы, точки разрыва, асимптоты на графике
30. Исследование функции – использование первой и второй производной

31-32. Исследование функций и параметрических кривых, построение их графиков. Применение к решению задач на наибольшее, наименьшее значение.

Индивидуальная работа № 1: построение графика функции, параметрической кривой, задача на экстремум.

Примерный вариант индивидуальной работы №1:

ВАРИАНТ 11.

1. Задать и исследовать функции, построить их графики: 1) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$, 2) $y = \sin(x) - \ln(\sin(x))$. На одном графике выбрать точку, построить график многочлена Тейлора второго порядка в этой точке.

2. Построить кривую, заданную параметрически, проведя исследование с помощью производных: $x = (t^2 + 6t + 5)/3, y = (t^3 - 54)/2t$

3. Найти на гиперболе $x^2/2 - y^2 = 1$ точку, ближайшую к точке $(3; 0)$.

Варианты индивидуальной работы №1 расположены в курсе https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=27893

2 семестр.

1. Интегрирование простейших функций, метод подведения под знак дифференциала.

2. Интегрирование по частям.

3. Интегрирование рациональных дробей.

4.Интегрирование рациональных дробей, метод Остроградского.

5.Интегрирование иррациональных функций.

6.Подстановки Чебышева и Эйлера.

7.Интегрирование тригонометрических функций.

8.Интегрирование различных функций – подготовка к контрольной работе.

9. Контрольная работа №3. Неопределённый интеграл.

Примерные варианты контрольной работы №3:

ВАРИАНТ 29.

1. $\int (\operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} 9x) dx$
2. $\int (2x-1)\cdot \operatorname{ch}(x^2-x)\, dx$
3. $\int \left(x - x^2\right) \sin(2x) dx$
4. $\int \sqrt[3]{x^6 + x^3}\, dx$
5. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg} x} dx$
6. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg} x + 3} dx$
7. $\int \frac{\sqrt[4]{x+4}}{x} dx$
8. $\int \frac{(2x^2-1)dx}{(x^2+4)(x^2+3)}$

ВАРИАНТ 27.

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 27}$
2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x - 1}} dx$
3. $\int \cos(\ln(2x)) dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$
5. $\int \cos^2 x \sin^3 x\, dx$
6. $\int \frac{\cos x\, dx}{2\cos^2 x + \sin x + 1}$
7. $\int (x - \sqrt[3]{x-2})\, dx$
8. $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2(x^2-4x+3)} dx$

ВАРИАНТ 30.

1. $\int (\operatorname{sh} 3x - \operatorname{ch} 5x) dx$
2. $\int 2x \cos(x^2 - 10)\, dx$
3. $\int \left(x^2 - 2x\right) e^{2x} dx$
4. $\int \sqrt[3]{x^3 - x^6}\, dx$
5. $\int \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} dx$
6. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x - 3} dx$
7. $\int \frac{\sqrt[5]{x+5}}{x} dx$
8. $\int \frac{(2x^2+5x)dx}{(x^2-4)(x^2+x+3)}$

10. Определённый интеграл. Интегральные суммы, суммы Дарбу, определение определённого интеграла.

11.Замена переменных и интегрирование по частям в определённом интеграле.

12-13. Приложения определённого интеграла – длина дуги, площадь, объём, физические приложения.

Индивидуальная работа №2: Вычисление и приложения определенного интеграла.

Варианты индивидуальной работы №2 расположены в курсе https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=25648

14. Предел функции многих переменных. Дифференцирование.

15. Дифференцируемость функции многих переменных. Касательная плоскость. Производная по направлению.

16. Дифференциал. Дифференцируемость сложной функции.
17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
18. Экстремум функции многих переменных.
19. Замена переменных.
20-21. Неявные функции – теорема существования, дифференцирование, разложение по формуле Тейлора, задачи на экстремум.
22. Условный экстремум.

23. Контрольная работа № 4. Функции многих переменных.

Примерный вариант контрольной работы № 4:

1. Пусть $f = f(x, y, z), x = u\sin v, y = u\cos v, z = u^2$. Найти $f_{uu}^{//}(1,0)$, $df(1,0)$.

2. Для каждой функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^2 + xy - xz - 1 = 0$ при $x = 0, y = 1$, найти $dz(0,1)$ и $z_{xy}^{//}(0,1)$.

3. Разложить функцию $f(x, y) = y\ln(1 + x^2)$ в окрестности точки (0,0) по формуле Тейлора до 4-го порядка включительно.

4. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к графику функции $f(x, y) = xy + \ln(1 + x^2)$ в точке (0, 1, 0). В каких точках графика касательная параллельна плоскости $x + y + 2z = 0$?

5. Найти производную функции $f(x, y) = xy + y + x^2$ в направлении $\overline{l} = \overline{i} - \overline{j}$. Найти градиент этой функции в точке $M_0(1,1)$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 3xy + y^3$.

7. Вычислить приближенно с помощью первого дифференциала $\sqrt[3]{0,99^2 + 2,1^2 + 2,98}$

24. Числовые ряды. Непосредственное суммирование, критерий Коши, признаки сравнения.
25. Признаки Даламбера, Коши, Маклорена-Коши, Раабе, Гаусса.
26. Сходимость произвольных рядов. Абсолютная и условная сходимость.
27. Равномерная сходимость последовательности и ряда.
28. Достаточные признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле.
29. Определение области сходимости функционального ряда.
30. Степенной ряд, радиус сходимости.
31. Ряд Тейлора, конкретные разложения.
32. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Задачи на суммирование.

Самостоятельная работа № 3: числовые и степенные ряды.

Примерный вариант самостоятельной работы №3.

ВАРИАНТ 21

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt[3]{n^3+1}}$ - исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\sqrt[3]{n^3+1}}$ - найти интервал сходимости, исследовать ряд на концах интервала на абсолютную и условную сходимость

3 семестр.

1. Криволинейные интегралы 1 рода, 2 рода
2. Двойные интегралы.
3. Двойные интегралы.
4. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

5.Замена переменных в двойном интеграле

6,7. Поверхностный интеграл 1 рода. Поверхностный интеграл 2 рода.

8. Формула Стокса

9.Тройной интеграл.

10.Формула Гаусса-Остроградского.

11.Замена переменных в тройном интеграле.

12.Контрольная работа № 5. Криволинейные, двойные интегралы, поверхностные, тройные интегралы.

Примерные варианты контрольной работы № 5

Вариант 21

1. Найти работу поля $\bar{F}=(10x+1)\bar{i}-2z\bar{j}-2y\bar{k}$ при перемещении вдоль кривой $\Gamma=\{4x^2+y^2+16z^2=16, y=2\}$ из т.(2,0,0) в т.(0,0,1) против час. стрелки относительно вектора $\vec{j}$.

2. Найти поток поля $\bar{F}=(2x^3yz-x^3y)\bar{i}+(x^2y-3x^2y^2z)\bar{j}+(3x^2yz-x^2z+z)\bar{k}$ через внешн. сторону $S=(x+3)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=1$.

Вариант 22

1. Найти $\oint\limits_C\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ по контуру $C=\{x^2+4y^2=1, z=1\}$, ориент.полож. отн. $\bar{k}$.

2. Вычислить $\iint\limits_S x^2ydydz+xy^2dzdx+xyzdxdy$, S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

13,14. Ряды Фурье.

15,16. Интегралы, зависящие от параметра. Бета- и Гамма –функции.

Индивидуальная работа № 3: Интегралы с параметрами. Ряды Фурье.

Примерные варианты индивидуальной работы № 3 расположены в курсе https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=26004

Правила проведения и критерии оценивания текущего контроля:

Контрольные и самостоятельные работы проводятся на практических занятиях, при очном присутствии студентов (кроме особых случаев для студентов с ОВЗ).

Результаты каждой ***контрольной работы*** и ***самостоятельной работы*** определяются оценками «Зачтено», «Не зачтено».

Оценка «Зачтено» выставляется, если студент решил больше 60% заданий контрольной работы и более 50% заданий самостоятельной работы.

Если студент не получил оценку «Зачтено», он имеет право сделать самостоятельно либо с помощью консультации преподавателя работу над ошибками и решить другой вариант контрольной (самостоятельной) работы для получения оценки «Зачтено». Другой вариант контрольной студент должен решать во время консультации, очно.

Студент может быть освобожден от контрольной работы с оценкой «зачтено» при условии посещения практических занятий, активной и успешной работы на занятиях, своевременном решении домашних работ.

Индивидуальные работы решаются студентом самостоятельно, в рамках самостоятельной работы студента, вне аудиторных занятий. Возможно частичное решение индивидуальных работ на консультациях.

Результаты каждой ***индивидуальной работы*** определяются оценками «Зачтено», «Не зачтено». Оценка «Зачтено» за индивидуальную работы ставится при условии полного правильного решения всех заданий индивидуальной работы. При наличии неполного решения или ошибок в решении заданий студент имеет право воспользоваться консультацией преподавателя для дорешивания и получения оценки «Зачтено».

Контрольная работа может быть заменена на индивидуальную работу по усмотрению преподавателя, ведущего практические занятия, с целью экономии времени на занятия. Правила оценивания при этом применяются как для индивидуальной работы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в первом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и две задачи. Студент освобождается от решения задач, если успешно сдал все контрольные и индивидуальные работы в течении семестра. Студент освобождается от первого вопроса билета, если успешно участвовал в коллоквиумах по темам 1 и 2 (***Тема 1. Множества, отображения, функции. Тема 2. Теория предела числовых последовательностей и функций.)***. Продолжительность экзамена 2 часа (для одного студента).

Экзамен во втором семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и две задачи. Студент освобождается от решения задач, если успешно сдал все контрольные и индивидуальные работы в течении семестра. Студент освобождается от первого вопроса билета, если успешно участвовал в коллоквиумах по темам 4 и 5 (***Тема 4. Неопределенный интеграл. Тема 5. Определенный интеграл Римана на отрезке и его приложения.)***. Продолжительность экзамена 2 часа (для одного студента).

Экзамен в третьем семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и две задачи. Студент освобождается от решения задач, если успешно сдал все контрольные и индивидуальные работы в течении семестра. Студент освобождается от первого вопроса билета, если успешно участвовал в коллоквиумах по темам 8 и 9 (***Тема 8. Криволинейные интегралы и их применение. Тема 9. Двойные интегралы и их применение.).*** Продолжительность экзамена 2 часа (для одного студента).

Примерный перечень теоретических вопросов на экзамен в 1 семестре: (Проверяется ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений – в разделе «Предел, непрерывность, дифференцируемость функций одной переменной»)

1. Множества. Определить операции объединения, пересечения, разности, декартового произведения множеств. Доказать одну из формул де Моргана.
2. Определить, что означает «задано отображение из множества X во множество Y». Что называется образом множества, прообразом множества, множеством значений при данном отображении? Привести пример.
3. Дать определение инъекции, сюръекции, биекции, обратного отображения к данному. Задать биекцию и обратное отображение по формуле $f(x) = \operatorname{tg} x$.
4. Объяснить, как задается композиция двух отображений. Привести два примера: а) композиция двух функций определена, в) композиция двух функций не определена.
5. Определить множества натуральных, целых, рациональных чисел.
6. Дать определения бесконечного и счетного множеств. Привести примеры счетных множеств. Доказать, что множество рациональных чисел счетно.
7. Определить, из каких элементов состоит множество вещественных чисел. Определить операции сравнения, сложения, умножения на множестве вещественных чисел.
8. Дать определения несчетного множества. Доказать, что множество вещественных чисел не счетно.
9. Сформулировать леммы о приближении вещественного числа рациональным, о плотности рациональных чисел в вещественных числах, об условии равенства вещественных чисел через рациональные. Доказать одну из лемм.
10. Дать определение точной верхней и точной нижней грани числового множества. Сформулировать и доказать теорему о существовании точных граней.
11. Сформулировать теорему о существовании корня из вещественного числа. Записать этапы доказательства этой теоремы.
12. Дать определение вещественной степени положительного вещественного числа. Сформулировать свойства операции возведения в степень.
13. Дать определение метрического пространства. В качестве примера рассмотреть пространство $\mathbf{R}^m$ при различных m.
14. Дать определение предела последовательности в метрическом пространстве. Доказать ограниченность сходящейся последовательности и единственность предела. Записать эти результаты для числовой последовательности.
15. Сформулировать и доказать критерий сходимости последовательности в метрическом пространстве, использующий подпоследовательности. Или доказать этот результат для числовых последовательностей.
16. Дать определение бесконечно малой и бесконечно большой числовой последовательности. Доказать теорему о связи между ними и теорему о свойствах бесконечно малых.
17. Доказать теорему об арифметических свойствах предела числовой последовательности. Сформулировать аналогичную теорему для предела функции.
18. Доказать теоремы о переходе к пределу в неравенстве для числовых последовательностей и о трех последовательностях. Сформулировать аналогичные теоремы для числовых функций.
19. Доказать теорему Вейерштрасса о монотонных последовательностях,
20. Определить число e как предел числовой последовательности. Доказать, что этот предел существует. Рассмотреть подпоследовательности.

21. Доказать лемму Кантора о вложенных отрезках. Указать те теоремы, в доказательстве которых применяется эта лемма.

22. Доказать теорему Больцано – Вейерштрасса об ограниченной последовательности.

23. Дать определение верхнего и нижнего предела числовой последовательности. Доказать критерий сходимости последовательности, использующий эти понятия.

24. Дать определение фундаментальной последовательности. Сформулировать и доказать критерий Коши сходимости числовой последовательности.

25. Дать определение предельной точки множества. Сформулировать и доказать критерий того, что точка является предельной для множества.

26. Дать определение открытого и замкнутого множества в метрическом пространстве. Сформулировать и доказать критерий открытого множества (через понятие замкнутого множества).

27. Дать определение предела отображения в смысле Коши и в смысле Гейне. Доказать эквивалентность этих определений.

28. Сформулировать и доказать критерий Коши существования предела отображения.

29. Доказать теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранение знака для функции, имеющей предел в точке.

$+\infty, -\infty$

31. Первый замечательный предел функции: формулировка, доказательство, следствия из него.

32. Второй замечательный предел функции: формулировка, доказательство, следствия из него.

33. Дать определение непрерывного в точке отображения. Доказать теоремы о замене переменного под знаком предела и о непрерывности композиции непрерывных функций.

34. Доказать теоремы о пределе монотонной функции и о непрерывности монотонной функции на отрезке.

35. Доказать непрерывность степенных функций.

36. Доказать непрерывность показательной функций.

37. Доказать непрерывность тригонометрических функций.

38. Дать определения эквивалентных функций в точке, функции, бесконечно малой по сравнению с данной в точке. Доказать теоремы о связи этих понятий, а так же о применение эквивалентностей для нахождения пределов функций.

39. Дать определение точки разрыва числовой функции. Рассказать о классификации точек разрыва. Привести примеры.

40. Доказать теорему Вейерштрасса о достижении точных граней непрерывной функцией на отрезке.

41. Доказать теорему Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке.

42. Доказать теорему о существование обратной функции для непрерывной монотонной функции на отрезке

43. Доказать непрерывность логарифмической функции.

44. Дать определение равномерно непрерывной функции на множестве. Доказать теорему Гейне – Кантора о равномерной непрерывности.

45. Дать определения компактного множества в метрическом пространстве. Привести примеры компактных и некомпактных множеств. Сформулировать критерий компактности в $\mathbf{R}^m$.

46. Доказать теорему Гейне – Кантора о равномерной непрерывности на компактах.

47. Дать определение линейно связного множества в $\mathbf{R}^m$. Доказать теорему Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на линейно связном множестве.

51. Дать определение производной и первого дифференциала функции в точке, доказать теорему о связи между ними и теорему о непрерывности дифференцируемой функции.

52. Получить уравнение касательной к дифференцируемой функции в точке из геометрических соображений. Показать связь между касательной и первым дифференциалом.

53. Сформулировать теорему о производной при арифметических действиях. Доказать формулу для дифференцирования произведения и частного двух функций.

54. Сформулировать и доказать теорему о производной композиции, а также инвариантность формы первого дифференциала.

55. Сформулировать и доказать теорему о производной обратной функции. Привести пример ее применения.

56. Записать таблицу производных основных элементарных функций. Получить несколько из записанных формул (на выбор преподавателя).

57. Дать определение производной порядка n. Доказать формулу Лейбница для производной n -го порядка от произведения двух функций.

58. Дать определение второго, третьего и т.д. дифференциалов функции в точке. Показать, что второй дифференциал не инвариантен при замене независимой переменной на функцию.

59. Вывести формулы для дифференцирования функции, заданной параметрически. Показать, как считается вторая, третья производная функции в этом случае. Привести пример.

60. Сформулировать и доказать теоремы Ферма и Ролля. Привести теоремы, в которых используются эти результаты.

61. Доказать формулы конечных приращений Коши и Лагранжа. Привести примеры их применения.

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

63. Дать определение многочлена Тейлора степени n для функции в точке, доказать его основные свойства.

64. Доказать теорему о структуре остаточного члена в формуле Тейлора. Получить форму Лагранжа, форму Коши.

65. Сформулировать необходимое и два достаточных условия локального экстремума функции. Доказать достаточные условия.

66. Дать определение выпуклой вверх, выпуклой вниз функции и точки перегиба. Доказать теорему о связи второй производной и выпуклости функции.

67. Дать определение вертикальной асимптоты и асимптот на бесконечности к графику функции. Доказать теорему о нахождении асимптот.

68. Описать схему исследования числовой функции для построения её графика, исследовать предложенную преподавателем функцию.

69. Описать схему исследования параметрически заданной кривой. Привести пример, не из лекции.

Примеры задач (Проверяется ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений – в части методов, основанных на пределе, непрерывности и дифференцируемости функций):

Задача 1. Найти предел функции.

Задача 2. Применить функцию одной переменной для нахождения наибольшего / наименьшего значения.

Примерный перечень теоретических вопросов на экзамен во втором семестре:

(Проверяется ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений – в разделе «Интегрирование. Ряды. Дифференцирование функций многих переменных»)

1. Комплексные числа: формы записи, арифметические действия, формула Эйлера.
2. Сформулировать основную теорему алгебры. Разложение многочленов с вещественными коэффициентами (с доказательствами). Разложение дробно-рациональных функций на простые дроби.
3. Дать определение первообразной и неопределенного интеграла. Выписать таблицу неопределенных интегралов.
4. Доказать теоремы об интегрировании подстановкой и по частям в неопределенном интеграле. Привести примеры.
5. Интегрирование дробно-рациональных функций: 4 вида простых дробей, метод неопределенных коэффициентов. Описать интегрирование дроби третьего или четвертого вида.
6. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций сведением к дробно-рациональным функциям. Описать интегрирование универсальной подстановкой.
7. Интегрирование иррациональных функций подстановками Чебышева. Рассмотреть один случай подробно, остальные кратко.
8. Интегрирование иррациональных функций подстановками Эйлера. Рассмотреть один случай подробно, остальные кратко.
9. Определенный интеграл от функции на отрезке – дать определение. Доказать необходимое условие интегрируемости. Определить суммы Дарбу, доказать их свойства. Построить иллюстрации.
10. Сформулировать критерий интегрируемости, использующий суммы Дарбу. Доказать его, используя свойства сумм Дарбу.
11. Описать два класса интегрируемых функций. Доказать интегрируемость для одного из классов функций. Привести примеры интегрируемых и неинтегрируемых функций на отрезке.
12. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать линейность, аддитивность интеграла, а также интегрируемость модуля интегрируемой функции.
13. Сформулировать и доказать первую теорему о среднем для определенного интеграла. Сформулировать следствия из нее, привести пример использования.
14. Сформулировать и доказать непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Получить формулу Ньютона-Лейбница для непрерывной функции.
15. Сформулировать и доказать теоремы о замене переменного и интегрировании по частям для определенного интеграла. Привести примеры их применения.
16. Дать определение площади плоской фигуры. Сформулировать критерии квадрируемости. Записать формулы для площади криволинейной трапеции и криволинейного сектора. Одну из формул доказать.

17. Дать определение объема трехмерного тела. Записать формулы для объема цилиндрического тела и объема тела при известных площадях сечения. Получить одну из формул.
18. Дать определение простой гладкой спрямляемой кривой в трехмерном пространстве и ее длины. Получить формулу для вычисления длины кривой.
19. Определение моментов и центра масс плоской кривой с помощью определенного интеграла. Выписать формулы, одну из них объяснить подробно.
20. Определение моментов и центра масс криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла. Выписать формулы, объяснить одну из них. Сформулировать и доказать теорему Гульдина.
21. Дать определение несобственных интегралов первого и второго рода. Доказать мажорантный признак сходимости. Привести примеры.
22. Сформулировать обе формулы Боннэ и вторую теорему о среднем для определенного интеграла. Дать геометрическую интерпретацию всех трех формул. Показать их применение для сходимости несобственных интегралов.
23. Числовые ряды. Определение суммы ряда, необходимое условие сходимости, критерий Коши сходимости числового ряда.
24. Сформулировать и доказать признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами. Привести примеры.
25. Сформулировать признаки Даламбера, Коши для рядов с неотрицательными членами. Доказать один из них. Привести примеры.
26. Сформулировать и доказать интегральный признак сходимости. Получить условие сходимости обобщенного гармонического ряда.
27. Абсолютная и условная сходимость ряда. Сформулировать и доказать признак Лейбница. Привести пример его применения.
28. Абсолютная и условная сходимость ряда. Сформулировать признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда. Доказать один из признаков. Привести пример.
29. Сформулировать теоремы Коши и Римана о перестановках членов ряда. Привести примеры ряда, сумма которого меняется после перестановки его членов.
30. Дать определение комплексного степенного ряда. Доказать существование круга сходимости и одну из формул для радиуса сходимости степенного ряда. Рассмотреть пример вещественного степенного ряда.
31. Дать определение ряда Тейлора для функции в точке, доказать условие сходимости ряда Тейлора к значениям функции. Получить ряд Тейлора для какой-нибудь функции в точке $x_0 \neq 0$.
32. Выписать стандартные разложения в ряд Маклорена, получить некоторые из них, указать интервалы сходимости. Доказать, что полученные ряды сходятся к функциям, которые разлагали.
33. Дать определение равномерной сходимости функционального ряда на множестве. Привести пример. Сформулировать теоремы, использующие равномерную сходимость. Доказать одну их них.
34. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы вещественного степенного ряда на интервале сходимости. Сформулировать и доказать теорему Абеля о непрерывности суммы на конце интервала сходимости.
35. Сформулировать теорему о почленном интегрировании и дифференцировании вещественного степенного ряда. Привести примеры применения этой теоремы. Доказать возможность почленного интегрирования через равномерную сходимость.
36. Определить частные производные и дифференциал функции нескольких переменных. Доказать непрерывность дифференцируемой функции и дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные.

37. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании композиции. Получить формулы для частных производных сложной функции. Доказать инвариантность формы первого дифференциала.
38. Доказать формулу конечных приращений Лагранжа для функции нескольких переменных и следствие из нее для функции, имеющей нулевой дифференциал.
39. Дать определение и доказать формулу для вычисления производной по направлению. Дать определение градиента. Доказать теорему о свойствах градиента функции в точке.
40. Дать определение касательной плоскости. Вывести уравнение касательной плоскости к графику функции двух переменных в следующих случаях: 1) функция задана явно , 2) функция задана неявно в окрестности точки графика.
41. Дать определение дифференциала второго и высших порядков. Сформулировать теорему о равенстве смешанных производных. Показать на примерах это равенство.
42. Записать и доказать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции нескольких переменных. Записать остаточный член в форме Пеано. Привести пример разложения по формуле Тейлора функции 2-х переменных.
43. Дать определение локального экстремума функции нескольких переменных. Сформулировать и доказать первое и второе необходимые условия экстремума. Привети пример нахождения стационарных точек функции 3-х переменных.
44. Сформулировать и доказать теорему о достаточных условиях для экстремума функции нескольких переменных. Привести примеры квадратичных форм различных видов.
45. Дать определение неявной функции одной переменной. Привести пример. Доказать теорему о существовании, единственности, непрерывности неявной функции.
46. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании неявной функции одной переменной. Привести пример.
47. Привести пример неявной функции нескольких переменных. Сформулировать теорему о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости такой функции.
48. Дать определение матрицы Якоби отображения, якобиана. Сформулировать свойства и привести пример матрицы Якоби.
49. Привести пример неявного отображения. Сформулировать теорему о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости неявного отображения.
50. Дать определение условного экстремума функции нескольких переменных. Указать два способа его нахождения: прямой и метод Лагранжа. Сформулировать теоремы, необходимые для использования метода Лагранжа. Привести пример.

Примеры задач:

(Проверяется ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений – в части методов, связанных с применением интеграла одной переменной и дифференциального исчисления функций нескольких переменных)

Задача 1. Применить определенный интеграл для нахождения площади / длины / объема тела.

Задача 2. Применить функцию нескольких переменных для решение задачи на экстремум.

Примерный перечень теоретических вопросов на экзамен в третьем семестре:

(Проверяется ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений – в разделе «Интегрирование функций нескольких переменных. Ряды Фурье. Интегралы с параметрами»)

1. Криволинейный интеграл первого рода: определение, свойства, вычисление (доказать).
2. Криволинейный интеграл второго рода: определение, свойства, вычисление (доказать).
3. Двойной интеграл: определение, свойства, площадь плоской области, *теорема о среднем значении* (сформулировать).
4. Двойной интеграл: сведение к повторному интегралу (доказать).
5. Сформулировать и доказать формулу Грина, следствие из неё о нахождении площади плоской области.
6. Сформулировать и доказать теоремы о критериях полного дифференциала для функции двух переменных.
7. Сформулировать и доказать теорему о площади области при переходе к другим координатам.
8. Сформулировать и доказать теорему о замене переменных в двойном интеграле.
9. Тройной интеграл: определение, свойства, сведение к повторному (сформулировать). *Теорема о среднем значении.*
10. Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Рассмотреть переход в сферические и цилиндрические координаты (якобиан, геометрический смысл).
11. Дать определение простой, гладкой, кусочно-гладкой поверхности в $\mathbf{R}^3$, особых точек на поверхности. Сформулировать и доказать теорему о касательной плоскости к гладкой поверхности.
12. Дать определение площади гладкой поверхности, доказать формулу для её вычисления.
13. Получить различные формулы для вычисления площади поверхности.
14. Поверхностный интеграл первого рода: определение, существование, вычисление (доказать) для гладкой и кусочно-гладкой поверхностей. Теорема о среднем значении.
15. Определить понятие ориентации для гладкой и для кусочно-гладкой поверхности. Как согласуются ориентация поверхности и её края? Привести примеры.
16. Сформулировать лемму о согласовании ориентаций гладкой поверхности и её края с помощью параметризации. Привести пример.
17. Поверхностный интеграл второго рода: определение, существование, вычисление (доказать) для гладкой и кусочно-гладкой поверхностей.
18. Формула Гаусса – Остроградского: сформулировать и доказать.
19. Формула Стокса: сформулировать и доказать.
20. Сформулировать и доказать теоремы о критериях полного дифференциала для функции трёх переменных.
21. Определить дифференциальные операторы: градиент скалярного поля, ротор и дивергенция векторного поля. Доказать их инвариантность.
22. Повторные дифференциальные операторы: рассмотреть все возможные случаи. Доказать
23. Определить потенциальное векторное поле. Сформулировать и доказать критерий для потенциальности поля в поверхностно-односвязной области.
24. Определить соленоидальное векторное поле. Сформулировать и доказать критерий для соленоидальности поля в выпуклой области.
25. Сформулировать теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании собственного интеграла по параметру. Доказать одну из теорем. Привести пример.
26. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать и доказать

признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Привести пример.

27. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать и доказать признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла. Привести пример.
28. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Привести пример.
29. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать правило Лейбница дифференцирования несобственного интеграла по параметру. Привести пример.
30. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Интеграл Дирихле – разодрать подробно.
31. Дать определение бета- и гамма-функции. Сформулировать свойства гамма-функции. Доказать теорему о непрерывности и дифференцируемости гамма-функции. Привести пример применения гамма-функции.
32. Дать определение бета- и гамма-функции. Сформулировать свойства бета-функции. Привести пример нахождения значений гамма-функции и бета-функции.
33. Дать определение тригонометрического ряда Фурье для числовой функции на интервале $(-\pi, \pi)$. Получить формулы для коэффициентов Эйлера – Фурье почленным интегрированием ряда.
34. Сформулировать и доказать формулы интегрального представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье.
35. Сформулировать и доказать лемму Римана и принцип локализации для тригонометрического ряда Фурье. Найти пределы (при $n\to\infty$) коэффициентов Эйлера-Фурье с помощью леммы Римана.
36. Сформулировать и доказать признак Дини сходимости ряда Фурье, а также следствие из этого признака. Привести пример сходящегося ряда Фурье и его суммы.
37. Записать различные формы разложения функции в тригонометрический ряд Фурье: на интервале произвольной длины, только по синусам, только по косинусам, показательную форму ряда Фурье. Привести объяснения для каждого случая.
38. Дать определение унитарного и нормированного пространств. Доказать неравенство Коши –Буняковского и теорему о введении нормы с помощью скалярного произведения. Привести пример унитарного пространства функций.
39. Определить пространство функций $L_2(a;b)$ и скалярное произведение в нем. Задать ортогональную систему в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$. Дать определения ряда Фурье по ортонормированной системе в унитарном пространстве.
40. Дать определения ряда Фурье по ортонормированной системе в унитарном пространстве. Доказать теорему о наилучшем приближении и неравенство Бесселя. Сформулировать равенство Парсеваля. Привести пример равенства Парсеваля для конкретного ряда Фурье.

Примеры задач:

(Проверяется ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений – в части методов, связанных с интегрированием функций нескольких переменных, рядами Фурье, интегралами с параметрами)

Задача 1. Найти работу поля при движении по кривой / поток поля через поверхность.

Задача 2. Разложить функцию в ряд Фурье.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Студент освобождается от решения задач, если сдал соответствующие темы на практических занятиях. Студент (по его желанию) освобождается от первого вопроса билета, если получил оценку на коллоквиуме по этой теме.

Оценка ставится за ответы на вопросы билета при условии, что обе задачи решены правильно или студент освобожден от их решения.

Оценка *«неудовлетворительно»* ставится, если не решена хотя бы одна из двух задач либо обе задачи решены, но на один из вопросов не дан ответ.

Оценка *«удовлетворительно»* ставится, если решены обе задачи (или студент освобожден от решения задач), даны неполные (без доказательств) ответы на оба вопроса билета, студент показал понимание материала, изложенного в его ответе, ответив на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка *«хорошо»* ставится, если решены обе задачи (или студент освобожден от решения задач), даны недостаточно полные (неполностью доказанные) ответы на оба вопроса билета, студент показал понимание вопросов билета, ответив на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка *«отлично»* ставится, если решены обе задачи (или студент освобожден от решения задач), даны достаточно полные, обоснованные доказательствами, ответы на оба вопроса билета, студент показал глубокое понимание вопросов билета, ответив на дополнительные вопросы преподавателя.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Данный тест может быть предложен студентам 3 или 4 курса бакалавриата после получения оценок за 1, 2, 3 семестр по дисциплине «Математический анализ». Предлагается один вариант теста, выбранный случайным образом. Для успешного выполнения теста все задания должны быть решены верно.

Примерные варианты теста:

Вариант 1.

1. Даны два множества $C=[0,4]$ и $D=(2,6)$. Какое из приведенных множеств является их пересечением?

1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

2. Даны функции $\alpha(x)=\frac{1}{x+1}$, $\beta(x)=\frac{3}{x^2}$, $\gamma(x)=\frac{x}{3}$. Из них бесконечно малой функцией при $x\to 0$ является функция:

1) $\alpha(x)$; 2) $\beta(x)$; 3) нет верного ответа; 4) $\gamma(x)$

3. Рядом Тейлора для функции $f(x)=e^x$ в точке $x_0=0$ является ряд

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}x^k$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ 4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$

4. Какое из множеств является компактным:

1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

5. Какая из функций раскладывается в ряд Фурье по косинусам

1) $f(x)=x,\ x\in(-\pi,\pi)$ 2) $f(x)=e^x,\ x\in(-1,1)$ 3) $f(x)=|x|,\ x\in(-\pi,\pi)$ 4) $x^3, x\in(-1,1)$

Вариант 2.

1. Областью определения функции $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$ является промежуток

1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; 3) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; 4) $\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$;

2. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+5x^2+7x}{5x^3-6x^5}$ равен:

1) 2; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) нет верного ответа.

3. График функции $y=x^4-2$ является выпуклым вверх на промежутке:

1) $(0;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)$; 3) нет верного ответа; 4) $(0,5\ ;+\infty)$.

4. Частная производная функции $f(x,y)=\sin e^{xy}$ по переменной x равна

1) $y\cos e^{xy}$ 2) $ye^{xy}\cos e^{xy}$ 3) $\cos e^{y}$ 4) $\cos e^{yx}\sin e^{y}$

5. Интеграл $\int x\cos x^2 dx$ равен:

1) $-\frac{1}{2}\sin x^2+C$; 2) $\frac{1}{2}\sin x^2+C$; 3) $x\sin x^2+x^2\cos x^2+C$; 4)нет верного ответа.

Вариант 3.

1. Какое из указанных множеств не является ограниченным сверху

1) $(-3,14)$ 2) $(-\infty,4]$ 3) $\{[0,n):n\in\mathrm{N}\}$ 4) $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathrm{N}\right\}$

2. Производная функции $f(x)=e^{x^2}$ равна:

1) $x^2e^{x^2-1}$; 2) нет верного ответа; 3) e^{2x}; 4) $2xe^{x^2}$

3. Рядом Тейлора для функции $f(x)=\ln(x+1)$ в точке $x_0=0$ является ряд

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ 2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k$ 4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$

4. Асимптотой функции $y=\frac{x^2-1}{x}$ является прямая:

1) $y=x+1$; 2) $y=-x$; 3) $y=x$; 4) нет верного ответа.

5. Значение какого интеграла равно объему тела V

1) нет верного ответа. 2) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$ 3) $\iiint\limits_V dxdydz$ 4) $\int\limits_0^{2\pi} Vdx$

Вариант 4.

1. Какая из последовательностей является сходящейся

1) $\frac{1}{n}$ 2) $\ln\frac{1}{n}$ 3) $n^{\frac{1}{2}}$ 4) $\sin n$

2. Какая из функций является непрерывной

1) $\frac{1}{x}$ 2) $\operatorname{sign} x$ 3) $\begin{cases} x+1, x>0 \\ x^2, x\le 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x, x>\pi \\ -x, x\le \pi \end{cases}$

3. Первообразной для функции $f(x)=x^3+2\cos 3x$ является функция:

1) нет верного ответа; 2) $F(x)=3x^2-6\sin x$; 3) $F(x)=\frac{x^4}{4}+2\sin 3x$;

4) $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}\sin 3x$.

4. Производной функции $f\left(x\right)=-5\cos e^{2x}$ в точке x является:

1) $10e^{2x}\sin e^{2x}$ 2) $5\cos e^{2x}$ 3) $-\sin e^{2x}$ 4) $\cos e$

5. К какому из интегралов можно применить формулу Грина

1) $\int\limits_L ydx-xdy$ 2) $\iint\limits_S y^2dzdx-x^2dydz+z^2dzdx$ 3) $\int\limits_L zdx+2xdy-ydz$

4) $\iint\limits_D xydxdy$

Вариант 5.

1. Даны два множества $C=[0,4]$ и $D=(2,6)$. Какое из приведенных множеств является их объединением?

1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

2. Какой из рядов является знакоположительным

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n+x\right)^3$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-e)^n$

3. Дифференциалом функции $f(x)=e+\ln x$ является функция

1) $\frac{1}{x}$ 2) $\left(e+\frac{1}{x}\right)dx$ 3) $\frac{1}{x}dx$ 4) $e+\frac{1}{1+x^2}$

4. Даны функции $\alpha(x)=\frac{1}{x+1}$, $\beta(x)=\frac{3}{x^2}$, $\gamma(x)=\frac{x}{3}$. Из них бесконечно большой функцией при $x\to 0$ является функция:

1) $\alpha(x)$; 2) $\beta(x)$; 3) нет верного ответа; 4) $\gamma(x)$.

5. Какой из интегралов является определенным

1) $\int\frac{dx}{3x^2-27}$; 2) $\int_e^{3e}\ln 2xdx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$; 4) нет верного ответа.

Вариант 6.

1. Даны два множества $C=[1,6]$ и $D=(0,3)$. Какое из приведенных множеств является их объединением?

1) $(0,6]$ 2) $[1,3)$ 3) $[1,3]$ 4) $(0,6)$

2. Какой из рядов является знакочередующимся

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+x)^3$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-e)^n$

3. Какая из функций является разрывной

1) $e^{\cos x}$ 2) $\operatorname{sign} x$ 3) $\begin{cases} x+1, x>0 \\ \dfrac{x^2}{3}+1, x\le 0 \end{cases}$ 4) $\sin x$

4. Асимптотой функции $y=\dfrac{x^3-2}{x^2}$ является прямая:

1) $y=x+2$; 2) $y=-x$; 3) $y=x$; 4) нет верного ответа.

5. Частная производная функции $f(x,y)=\sin e^{xy}$ по переменной y равна

1) $y\cos e^{xy}$ 2) $ye^{xy}\cos e^{xy}$ 3) $xe^{xy}\cos e^{xy}$ 4) $\cos e^{yx}\sin e^{y}$

Вариант 7.

1. Область определения функции $y=\ln(3+2x)$ имеет вид:

1) $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$; 3) нет верного ответа; 4) $(0;+\infty)$.

2. Даны функции $\alpha(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $\beta(x)=\dfrac{3}{x^2}$, $\gamma(x)=\dfrac{x+3}{5}$. Из них бесконечно большой функцией при $x\to -3$ является функция:

1) $\alpha(x)$; 2) $\beta(x)$; 3) нет верного ответа; 4) $\gamma(x)$.

3. Дифференциалом функции $f(x)=\cos x+3e^{3x}$ является функция

1) $-\sin x+9e^{3x}$ 2) $\left(-\sin x+3e^{3x}\right)dx$ 3) $\sin x+3e^{3x}$ 4) $\left(-\sin x+9e^{3x}\right)dx$

4. Первообразной для функции $f(x)=x^6+2\sin 3x$ является функция:

1) нет верного ответа; 2) $F(x)=7x^6-6\sin x$; 3) $F(x)=\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{2}{3}\cos 3x$;

4) $F(x)=\dfrac{x^5}{7}+\dfrac{2}{3}\cos 3x$.

5. Значение какого интеграла равно площади фигуры S

1) нет верного ответа. 2) $\iint\limits_S dxdy$ 3) $\iint\limits_S (x+y)dxdy$ 4) $\int\limits_0^{2\pi} Sdx$

Вариант 8.

1. Какое из указанных множеств не является ограниченным снизу

1) $(-3{,}14)$ 2) $(-\infty,4]$ 3) $\{[0,n):n\in \mathrm{N}\}$ 4) $\left\{\frac{1}{n}:n\in \mathrm{N}\right\}$

2. Предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$ равен:

1) 3; 2) $-\dfrac{1}{4}$; 3) нет верного ответа; 4) $-\dfrac{2}{3}$.

3. Рядом Тейлора для функции $f(x)=\cos x$ в точке $x_0=0$ является ряд

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)}x^{2k}$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}x^{k}$ 4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k)!}x^{2k}$

4. Какой из интегралов является неопределенным

1) $\int\dfrac{dx}{3x^2-27}$; 2) $\int_e^{3e}\ln 2x dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^5}$; 4) все.

5. К какому из интегралов можно применить формулу Гаусса-Остроградского

1) $\int\limits_L ydx-xdy$ 2) $\iint\limits_S y^2dxdy-x^2dydz+z^2dzdx$ 3) $\int\limits_L zdx+2xdy-ydz$

4) $\iint\limits_D xydxdy$

Вариант 9.

1. Какая из последовательностей является сходящейся

1) $8\ln\dfrac{1}{n}$ 2) $n^{\frac{1}{4}}$ 3) $\cos n$ 4) $\dfrac{1}{n^2}$

2. Производная функции $f(x)=\cos\left(x^3\right)$ равна:

1) $-3x^2\cos\left(x^3\right)$; 2) нет верного ответа; 3) $3x^2\sin\left(x^3\right)$; 4) $-3x^2\sin\left(x^3\right)$.

3. График функции $y=x^2-5$ является выпуклым вверх на промежутке:

1) $(0;+\infty)$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) нет верного ответа; 4) $(5;+\infty)$.

4. Какое из множеств является открытым на евклидовой прямой:

1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

5. Какая из функций раскладывается в ряд Фурье по синусам

1) $f(x)=x^2,\ x\in(-\pi,\pi)$ 2) $f(x)=e^x,\ x\in(-1,1)$ 3) $f(x)=|x|,\ x\in(-\pi,\pi)$

4) $x^3,\ x\in(-2,2)$

Вариант 10.

1. Даны два множества $C=[0,4]$ и $D=(2,6)$. Какое из приведенных множеств является разностью $C\setminus D$?

1) $[0,6)$ 2) $(2,4]$ 3) $[0,2]$ 4) $(4,6)$

2. Какая из последовательностей является сходящейся

1) $n^{\frac{1}{2}}$ 2) $\ln\dfrac{1}{n}$ 3) $e^{\frac{1}{n}}$ 4) $\sin n$

3. Какой из рядов является знакопеременным

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+x)^3$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-e)^n$

4. Рядом Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 0$ является ряд

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ 3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} x^{2k-1}$ 4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$

5. Какая из точек является точкой максимума для функции $y = 8x - \frac{1}{4}x^4$:

1) 2; 2) 12; 3) -2; 4) 0

Ключи к тесту:

Вариант 1	1	2	3	4	5
Ответ	2	4	4	3	3

Вариант 2	1	2	3	4	5
Ответ	4	2	3	2	2

Вариант 3	1	2	3	4	5
Ответ	3	4	1	3	3

Вариант 4	1	2	3	4	5
Ответ	1	1	4	1	1

Вариант 5	1	2	3	4	5
Ответ	1	2	3	2	2

Вариант 6	1	2	3	4	5
Ответ	1	4	2	3	3

Вариант 7	1	2	3	4	5
Ответ	1	1	4	3	2

Вариант 8	1	2	3	4	5
Ответ	2	2	1	1	2

Вариант 9	1	2	3	4	5
Ответ	4	4	3	4	4

Вариант 10	1	2	3	4	5
Ответ	3	3	1	2	1

Информация о разработчиках

Лазарева Елена Геннадьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета ТГУ.