

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Некорректные и обратные задачи

по направлению подготовки / специальности

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование
Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения

Очная

Квалификация

Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь
Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель /
Исследователь в области математики и компьютерных наук

Год приема

2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л. В. Гензе

Председатель УМК

Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ПК-1 Способен самостоятельно решать и ставить отдельные задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) исследования / проекта.

ПК-2 Способен представлять собственные научные (научно-технические) результаты профессиональному сообществу.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РОПК-1.1 Знаком с решенными и не решенными задачами в области своих научных интересов, знаком с методами решения научных задач в области своих научных интересов

РОПК-1.2 Умеет: - Понимать цели и задачи исследования, предмет и объект исследований, актуальность и значимость проводимых исследований

- Анализировать методы и способы решения исследовательских задач
- Проводить информационный поиск (собирать и обрабатывать научную и научно-техническую информацию) для решения исследовательских задач
- Использовать цифровые и информационные ресурсы, научную, опытно-экспериментальную и приборную базы по тематике проводимых исследований и (или) разработок
- Проводить исследования, эксперименты, наблюдения, измерения в рамках решаемых задач

- Интерпретировать научные (научно-технические) результаты, полученные в ходе решения исследовательских задач

РОПК-2.1 Знаком с отечественными и зарубежными базами данных и системами учета научных (научно-технических) результатов

РОПК-2.2 Умеет: - Использовать в профессиональной деятельности отечественные и зарубежные базы данных и системы учета научных (научно-технических) результатов

- Информировать научную общественность о своих результатах полученных в ходе проведенных исследований, экспериментов, наблюдений, измерений на научных (научно-практических) мероприятиях
- Участвовать в научных дискуссиях по тематике своей исследовательской работы на научных (научно-практических) мероприятиях
- Представлять научные (научно-технические) результаты в форме публикаций в рецензируемых научных изданиях
- Представлять научные (научно-технические) результаты в отечественных и зарубежных базах данных и системах учета

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- реферат;
- коллоквиум;
- отчеты по практическим заданиям.

Варианты тем для реферата:

1. Обратные задачи: поиск причин по следствиям: Общее представление об обратных задачах и их отличии от прямых.
2. Прикладные обратные задачи: от геофизики до медицины: Обзор конкретных примеров обратных задач в различных областях науки и техники.
3. Некорректность обратных задач: причины и последствия: Анализ проблемы некорректности.
4. Регуляризация: ключ к решению некорректных задач: Изучение методов регуляризации как основного инструмента для работы с некорректными задачами.

5. Методы решения обратных задач: от прямых задач к регуляризации: Сравнение различных подходов к решению обратных задач, включая их преимущества и недостатки.
6. Теоремы единственности: условия однозначного решения. Изучение теорем единственности.
7. Влияние ошибок измерений на решение: Анализ устойчивости решений обратных задач к погрешностям в исходных данных.

Таблица 1. Система критериев при оценивании реферата

Критерии соответствия	Оценка
Реферат демонстрирует полное соответствие всем предъявляемым требованиям. Четко обозначена и аргументирована актуальность темы, представлен обзор различных взглядов на проблему, логично изложена авторская позиция, сформулированы обоснованные выводы. Тема раскрыта в полном объеме, соблюдены требования к объему и оформлению. Студент уверенно отвечает на дополнительные вопросы.	Отлично
Реферат в целом соответствует требованиям, но содержит незначительные недостатки. Могут быть неточности в изложении материала, некоторая непоследовательность в аргументации, небольшие отклонения от требуемого объема, незначительные ошибки в оформлении или неполные ответы на дополнительные вопросы.	Хорошо
В реферате имеются значительные отклонения от установленных требований. Тема раскрыта не полностью, допущены фактические ошибки в содержании или ответах на вопросы, отсутствует заключение (вывод) при защите.	Удовлетворительно
Реферат не соответствует требованиям. Тема не раскрыта, демонстрируется существенное непонимание проблемы.	Неудовлетворительно

Вопросы для коллоквиума и текущего контроля успеваемости

1. Назовите три группы методов численного решения задач математической физики.
2. В чем смысл метода граничных интегральных уравнений?
3. Кто ввел понятие корректности постановки задач математической физики?
4. Какую задачу рассматривал Адамар как некорректно поставленную?
5. Сформулируйте задачу Абеля. К какому интегральному уравнению она приводится?
6. Определите вклад Вольтерра в развитие теории по интегральным уравнениям.
7. В каком году появилась теория уравнений Фредгольма?
8. Перечислите основные результаты теории Фредгольма.
9. Сформулируйте классическое определение корректности постановки задач математической физики.
10. Дайте определение корректности на паре метрических пространств.
11. Проведите классификацию интегральных уравнений.
12. Какие уравнения описывают корректно поставленные задачи?
13. В каких случаях уравнение Вольтерра первого рода можно свести к уравнению второго рода?
14. Почему можно ограничиться изучением уравнений Фредгольма?
15. Какие задачи описывают интегральные уравнения первого рода?

16. Кто из российских математиков внес значительный вклад в развитие теории решения некорректных задач?
17. Приведите определение корректности по Тихонову.
18. Сформулируйте теорему Тихонова.
19. Назовите задачи, которые можно привести к интегральным уравнениям.
20. К какому интегральному уравнению можно свести задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка?
21. Опишите задачу об упругой нити.
22. Приведите примеры постановок некорректных задач.
23. Назовите методы решения некорректных задач.
24. В чем смысл метода квадратур решения уравнения Фредгольма второго рода?
25. Какой подход используется при оценке погрешности метода квадратур?
26. Приведите теорему о сходимости вычислительного правила метода квадратур.
27. Примените метод квадратур к решению уравнения Фредгольма первого рода.
28. Получите расчетные формулы метода квадратур в случае уравнения Вольтерра первого рода.
29. Сформулируйте определение регуляризующего оператора.
30. Дайте понятие регуляризованного решения.
31. Какие классические задачи решаются интуитивной регуляризацией?
32. Введите понятие псевдорешения.
33. Дайте определение нормального псевдорешения.
34. Почему задача нахождения нормального псевдорешения неустойчива?
35. В чем смысл метода регуляризации нахождения нормального псевдорешения?
36. Приведите обоснование метода регуляризации.
37. Какие существуют алгоритмы определения параметра регуляризации?
38. На примере системы двух линейных алгебраических уравнений покажите применение метода регуляризации. Как можно подобрать параметр регуляризации в этом случае?
39. Рассмотрите возможность параллельной реализации метода регуляризации.
40. Создайте алгоритм метода регуляризации численного решения уравнения Фредгольма первого рода.
41. Разработайте алгоритм метода регуляризации в случае уравнения Фредгольма первого рода с симметрическим ядром.
42. В виде какого ряда ищется регуляризованное решение для случая симметрического ядра?
43. При каких условиях имеет место теорема, обосновывающая метод регуляризации?
44. Каким соотношением связан параметр регуляризации и погрешность правой части в случае уравнения Фредгольма первого рода с симметрическим ядром?
45. Рассмотрите возможность параллельной реализации метода регуляризации в случае симметрического ядра уравнения Фредгольма первого рода.
46. Различие между прямой и обратной задачей. Примеры из практики.
47. Устойчивость и корректность решений прямых и обратных задач: что это значит и почему это важно.
48. Как малые изменения в коэффициентах или правой части системы линейных уравнений влияют на её решение.
49. Обзор методов, используемых для решения обратных задач.
50. Как обратные задачи помогают решать проблемы в реальном мире.
51. В каких научных и инженерных дисциплинах используются концепции прямых и обратных задач.

Таблица 2. Система критериев при оценивании коллоквиума

Критерии соответствия	Оценка
-----------------------	--------

Демонстрируется глубокое понимание материала. Ответ всесторонний, точный, логичный и хорошо структурированный. Студент свободно владеет терминологией, четко устанавливает причинно-следственные связи и опирается на собственный конспект для организации ответа.	Отлично
Ответ полный и развернутый, но может содержать незначительные неточности. Студент демонстрирует хорошее понимание материала, логично излагает свои мысли и в основном владеет терминологией.	Хорошо
Ответ неполный, с пробелами в знании терминологии и существенными ошибками в изложении фактов и теорий. Студент испытывает трудности в установлении логических связей.	Удовлетворительно
Ответ отсутствует или содержит лишь минимальную, несистематизированную информацию. Студент не демонстрирует понимания материала, не владеет терминологией и не способен выстроить логически связный ответ.	Неудовлетворительно

Варианты заданий по лабораторным работам

Тема 1. Построить регуляризующий оператор, позволяющий с помощью формулы численного дифференцирования вычислить значение соответствующей производной. Полученное значение сравнить с точным, сделать вывод.

Вариант 1.

$$y_1' = \frac{1}{2\alpha}(y_2 - y_0) - \frac{\alpha^2}{6} y^{(3)}(\xi).$$

Здесь $x_1 = 0.5; x_0 = 0.5 - \alpha; x_2 = 0.5 + \alpha; y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2; f(x) = 1 + \sin(x)$.

Вариант 2.

$$y_2' = \frac{1}{2\alpha}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{\alpha^3}{3} y^{(3)}(\xi).$$

Здесь $x_2 = 1; x_1 = 1 - \alpha; x_0 = 1 - 2\alpha; y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2; f(x) = 2 \cos(x)$.

Вариант 3.

$$y_0' = \frac{1}{2\alpha}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{\alpha^2}{3} y^{(3)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 5; x_1 = 5 + \alpha; x_2 = 5 + 2\alpha; y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2; f(x) = x^3 + \sin(x)$.

Вариант 4.

$$y_2' = \frac{1}{12\alpha}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{\alpha^4}{30} y^{(5)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 2 - 2\alpha; x_1 = 2 - \alpha; x_2 = 2; x_3 = 2 + \alpha; x_4 = 2 + 2\alpha;$
 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, 4; f(x) = x^2 + \cos(2x).$

Вариант 5.

$$y_3' = \frac{1}{12\alpha}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) + \frac{\alpha^4}{20} y^{(5)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 1 - 3\alpha; x_1 = 1 - 2\alpha; x_2 = 1 - \alpha; x_3 = 1; x_4 = 1 + \alpha;$
 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, 4; f(x) = x^5 + 5x + 1.$

Вариант 6.

$$y_1' = \frac{1}{12\alpha}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{\alpha^4}{20} y^{(5)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 1 - \alpha; x_1 = 1; x_2 = 1 + \alpha; x_3 = 1 + 2\alpha; x_4 = 1 + 3\alpha;$
 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, 4; f(x) = x \sin(x).$

Вариант 7.

$$y_0' = \frac{1}{12\alpha}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{\alpha^4}{5} y^{(5)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 0; x_1 = \alpha; x_2 = 2\alpha; x_3 = 3\alpha; x_4 = 4\alpha;$
 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, 4; f(x) = \exp(x).$

Вариант 8.

$$y_4' = \frac{1}{12\alpha}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{\alpha^4}{5} y^{(5)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 3 - 4\alpha; x_1 = 3 - 3\alpha; x_2 = 3 - 2\alpha; x_3 = 3 - \alpha; x_4 = 3;$
 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, 4; f(x) = x^3 + \exp(x).$

Вариант 9.

$$y_0' = \frac{1}{16\alpha}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{\alpha^3}{4} y^{(4)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 2; x_1 = 2 + \alpha; x_2 = 2 + 2\alpha; x_3 = 2 + 3\alpha;$
 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3; f(x) = x \exp(x).$

Вариант 10.

$$y_1' = \frac{1}{6\alpha}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{\alpha^3}{12} y^{(4)}(\xi).$$

Здесь $x_0 = 1 - \alpha; x_1 = 1; x_2 = 1 + \alpha; x_3 = 1 + 2\alpha;$
 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3; f(x) = x + \exp(x).$

Тема 2. Методом регуляризации по Тихонову построить регуляризованное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x).$$

Принять, что ядро $K(x, s) = \frac{1}{\pi(1 + (x - s)^2)}$. Самостоятельно получить вид функции $f(x)$ решением прямой задачи с известными $a, b, y(s)$.

Тема 6. На основе заданной сетки необходимо сформировать N различных токовых конфигураций. Используя существующее программное обеспечение, сначала решить прямую задачу, а затем обратную. Ключевым этапом является оценка точности реконструкции, полученной в результате решения обратной задачи, с помощью метрик CC (Correlation Coefficient), RE (Relative Error) и $PMSE$ (Percentage Mean Square Error).

Таблица 3. Система критериев при лабораторных работ

Критерии соответствия	Оценка
Работа выполнена безупречно, полностью самостоятельно и в строгом соответствии с требованиями. Студент продемонстрировал глубокое понимание теории, отличные практические навыки и умение самостоятельно находить и использовать необходимые ресурсы. Работа оформлена аккуратно и эффективно.	Отлично
Работа выполнена в полном объеме и самостоятельно, но с незначительными отклонениями от идеальной последовательности. Студент продемонстрировал хорошее знание теории и необходимые практические навыки. Возможны небольшие недочеты в оформлении.	Хорошо
Работа выполнена с помощью преподавателя и, возможно, с дополнительным временем. Студент продемонстрировал базовое знание теории, но испытывал трудности при самостоятельной работе.	Удовлетворительно
Студент не готов к выполнению работы. Результаты работы неверны и не соответствуют цели. Продemonстрировано плохое знание теории и отсутствие необходимых навыков.	Неудовлетворительно

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая часть содержит три вопроса. Ответы на вопросы первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит практическую задачу. Ответ на вопрос второй части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов:

1. Классификация линейных интегральных уравнений. История развития теории по интегральным уравнениям.
2. Классическое определение корректности постановки задачи математической физики и смысл методов решения корректных задач: конечных разностей, конечных элементов, граничных интегральных уравнений.
3. Определение корректности на паре метрических пространств. Пример Адамара - задача Коши для уравнения Лапласа – как пример некорректно поставленной задачи.
4. Приведение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.
5. Вывод интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно плотности распределения силы, под влиянием которой нить примет заданную форму.
6. Неустойчивость по правой части при рассмотрении высокочастотного возмущения с конечной амплитудой.

7. Постановки некорректных задач: обработка показаний физических приборов; поиск полезных ископаемых (электроразведка); обратные задачи теплопроводности; задачи вычислительной диагностики.
8. Корректность по Тихонову и ее отличия от классической корректности. Теорема Тихонова.
9. Метод квадратур: построение вычислительного правила; оценка погрешности приближенного решения; сходимость метода квадратур; примеры выбора квадратурных формул. Применение метода квадратур к решению уравнений Фредгольма и Вольтерра первого рода.
10. Метод регуляризации: определение регуляризирующего оператора и регуляризованного решения. Две классические задачи, решаемые регуляризацией: численное дифференцирование и суммирование рядов Фурье.
11. О дискретизации задачи нахождения приближенных решений интегральных уравнений первого рода : понятие нормального псевдорешения и неустойчивость задачи его нахождения; метод регуляризации нахождения нормального псевдорешения; обоснование метода регуляризации; алгоритмы подбора параметра регуляризации и возможность их параллельной реализации на ПЭВМ.
12. Метод регуляризации в применении к решению двумерной системы линейных алгебраических уравнений.
13. Моделирование некорректности на примере интегрального уравнения Фредгольма первого рода.
14. Разработка параллельного алгоритма метода регуляризации решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.
15. Метод регуляризации в случае симметрического ядра: пример задачи из области обработки результатов наблюдений с погрешностью в правой части; поиск регуляризованного решения в виде бесконечного ряда по собственным функциям ядра (формулировка и доказательство теоремы). Пример применения теории на практике.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все вопросы теста, на теоретический вопрос дан развернутый ответ и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если в целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными моделями и концепциями механики. Допущены существенные терминологические и фактические ошибки.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Теоретические вопросы:

1. Математическая обработка экспериментальных данных. Прямые и обратные задачи. Классификация обратных задач.
2. Обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обратная задача Штурма-Лиувилля, обратная задача электроразведки.
3. Что такое корректность задачи?
4. Как корректность задачи связана с математической моделью, которую мы используем?
5. Приведите примеры задач, которые считаются некорректными.
6. Как математически записать задачу восстановления функции?

7. Какие основные типы непрерывных функций вы знаете?
8. Как обычно строятся методы для восстановления функций?
9. Когда мы можем быть уверены, что наше приближенное решение будет близко к правильному?
10. Как выбрать правильное значение параметра регуляризации, зная погрешность данных, и как оценить ошибку решения?
11. В чем суть метода регуляризации Тихонова?
12. Понятие метода решения некорректно поставленной задачи. Регуляризующие алгоритмы. Общий прием построения регуляризующих алгоритмов. Примеры: метод А.Н.Тихонова, итерационные методы.
13. Выбор параметра регуляризации. Принцип невязки выбора параметра регуляризации. Оценка погрешности метода решения. Понятие оптимального метода.
14. Методы решения интегральных уравнений Вольтерра.
15. Граничные обратные задачи и методы их решения. Коэффициентные обратные задачи, их исследование и методы решения.

Информация о разработчиках

Старченко Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, каф. ВМиКМ, зав. каф.
Афанасьева Анна Александровна, аспирант каф. ВМиКМ.