Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Компьютерная алгебра
по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-2 Способен находить или создавать, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике современный математический аппарат, математические модели и алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем в научно-исследовательской и (или) опытно-конструкторской деятельности в различных областях техники, естествознания, экономики и управления.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 2.1 Использует методы построения и анализа математических моделей в задачах естествознания, технике, экономике и управлении

ИОПК 2.2 Демонстрирует умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии (в том числе с применением многопроцессорных систем) для решения различных задач в области профессиональной деятельности

ИОПК 2.3 Участвует в разработке математических моделей для решения задач естествознания, техники, экономики и управления под руководством более квалифицированного работника

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки выполнения индивидуальных контрольных работ и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Студент должен продемонстрировать знание системы Mathematica и умение ее использовать.

Элементы текущего контроля:

1. Вопросы, связанные с использованием системы Mathematica.
2. Выполнение индивидуальных контрольных работ – программное решение заданных задач.

Для этого он должен ответить на избранные вопросы по использованию Mathematica.

ВОПРОСЫ

1. Возможности систем компьютерной алгебры. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
2. Об “ошибках” систем компьютерной алгебры. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
3. Достоинства и особенности Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
4. Структура системы Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
5. Главное меню Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
6. Система помощи Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
7. Палитры. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
8. Сессии и вычисления. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
9. Блокноты и ячейки. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
10. Общие советы и типичные ошибки. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

За ответы на предложенные вопросы студент получает суммарно 0, 1 или 2 баллов за весь семестр.

Контрольные индивидуальные задачи предлагаются из следующего списка.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Целое *x* удовлетворяющее уравнению
2682440^4+15365639^4+18796760^4 = x^4
опровергает гипотезу Эйлера, что сумма трех четвертых степеней никогда не является сама четвертой степенью. Это предположение было открытым почти 200 лет, пока Noam Elkies из Гарварда не обнаружил данный контрпример в 1988 г.
Найдите *x*. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
2. Проверить, что формула Эйлера x^2+x+41 дает простое число для всех x от 0 до 39. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
3. Докажите, что
Tan[3Pi/11]+4Sin[2Pi/11]==Sqrt[11]
4. Какова вероятность, что случайно выбранное 12-значное число будет простым? Используйте встроенную функцию PrimePi. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
5. Пусть a = 98 и b = 75. Покажите, что (a^a)(b^b) оканчивается точно на 98 нулей. Используйте функцию Mod. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
6. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел в сумме с единицей есть полный квадрат. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
7. Представьте
$$\exp = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}$$
в виде одной дроби, и преобразуйте ее в сумму дробей с минимальными знаменателями. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
8. Покажите, что среди первых 450 чисел Фибоначчи количество нечетных чисел в два раза больше чем четных. Используйте функции Fibonacci и Select. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
9. Пусть m – натуральное число и
$$A = \frac{(m+3)^3}{3m}$$
Найдите все *m* меньшие 1000, такие что *A* – целое. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
10. Найдите единственное положительное n < 1000 такое, что n! + (n + 1)! есть полный квадрат. Используйте функции Select и IntegerQ. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
11. Какая цифра не является последней у первых 20 чисел Фибоначчи? (ОПК 2, ИОПК 2.2)
12. Найдите первые пять положительных целых чисел n таких, что n^6 + 1091 есть простое число. Убедитесь, что все они находятся между 3500 и 8500. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
13. Покажите, что среди первых 200 простых чисел p числа {3, 7, 13, 43, 137} – это как раз те, для которых остаток от деления 19^(p –1) на p^2 равен 1. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
14. Объясните, что делают следующие функции:
g[n_]:=Times@@Apply[Plus,Inner[List,x^Range[n],1/x^Range[n],List],1]
t[n_]:=Times@@Apply[Plus,Thread[List[x^Range[n],1/x^Range[n]]],1]
(ОПК 2, ИОПК 2.2)
15. Объясните, что вычисляют следующие функции
Power@@(x+y)
Plus@@@(x^y+y^z)
(ОПК 2, ИОПК 2.2)
16. Докажите
(1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3). (ОПК 2, ИОПК 2.2)

17. Вычислите

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}$$ (ОПК 2, ИОПК 2.2)

18. Напишите функцию для вычисления ряда

$s(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}$. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

19. Определите $s(k,n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$. Покажите, что $\sum_{a=0}^{n}\frac{s(2,3a+1)}{s(1,3a+1)}$ – всегда точный квадрат. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

20. Определите, для каких целых n из диапазона $1 \le n \le 10$ число $\sin(\pi/n)$ выражается в радикалах?
Тот же вопрос для $1 \le n \le 1000$. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

21. Сколько нулей в 1000! на конце? Ответьте, не печатая значение 1000!. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

22. Сколько нулей в 10000! на конце? Ответьте, не печатая значение 10000!. (ОПК 2, ИОПК 2.2) (ОПК 2, ИОПК 2.2)

23. Используя Manipulate, заметьте, что x^(2n)+x^n+1 может быть разложен на небольшие множители для любого n, 1 <= n <= 30, за исключением n = 1, 3, 9,27. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

24. Определите количество простых чисел среди первой тысячи чисел Фибоначчи. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

25. Найдите все целые 0 < n < 20000, такие что 1997 делит (n^2) + (n + 1)^2. Сделайте то же самое для 2009. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

26. Заметим что 12^2 = 144 и 21^2 = 441, т.е. числа 12 и 21 и их квадраты являются взаимно обратимы (цифры написаны в противоположном порядке). Найдите все числа до 10000, обладающие этим свойством.
Используйте функции FromDigits, Reverse, IntegerDigits и Select. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

27. Найдите все палиндромы, меньшие 5000, которые вместе со своими обращениями являются простыми числами. Таких чисел - 20.
Используйте функции FromDigits, Reverse, IntegerDigits и Select. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

28. Найдите все целые числа 0 < m < 10^5 таких, что четвертая степень количества положительных делителей числа m равна m.
Используйте функции Divisors и Select. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

29. Для каких чисел n <= 1000 выполнено Mod[Fibonacci[n], n] == 0? Используйте функцию Select. Предложите гипотезу и в случае n > 1000. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

30. Определите функцию squareFreeQ[n], которая возвращает True, если n не делится на какой-нибудь квадрат, и False в противном случае. Протестируйте ее с помощью встроенной функции SquareFreeQ.
Используйте функцию FactorInteger и Select. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

31. Число с n цифрами называется циклическим, если, умножая его на 1, 2, 3, ..., *n*, мы получаем каждый раз те же цифры, но в другом порядке. Найдите единственное шестизначное циклическое число. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

32. Функцию
cs(n) = 1^3 + 2^3 + ... + n^3
можно определить как
cs[n_] := Apply[Plus, Range[n]^3]
или используя сокращение для Apply
cs[n_] := Plus @@ Range[n]^3
Определите подобным образом функции

ep(n) = 1 + 1/1! + 1/2! + ... +1/n!
p(n) = (1+x)(1 + x^2) ···(1 + x^n). (ОПК 2, ИОПК 2.2)

За решения предложенных задач студент получает суммарно от 0 до 2 баллов за весь семестр.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

На получение зачета с оценкой студенту отводится полтора часа.

На промежуточной аттестации студент должен ответить на вопрос из следующего списка.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Задача представления данных. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
2. Канонические представления. Нормальные представления. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
3. Связь между каноническим и нормальным представлением. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
4. Отношения эквивалентности на множестве выражений. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
5. Естественность представления. Метод Брауна. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
6. Неразрешимые проблемы для представления данных. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
7. Унифицированность представления различных математических объектов в системе Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
8. Выражения. Полная форма. Голова. Доступ к частям выражений. Деревья. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
9. Автоматическое упрощение. Автоматическое упрощение в системе Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
10. Поля. Примеры полей. Поля с присоединенными элементами. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
11. Кольца. Примеры колец. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
12. Делимость целых чисел. Частное и остаток. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
13. Взаимная простота. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
14. Алгоритм Евклида. Обобщенный алгоритм Евклида. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
15. Простые числа. Решето Эратосфена. Основная теорема арифметики.
16. Формулы для простых чисел. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
17. Основные типы чисел в системе Mathematica. Основные операции над числами. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
18. Многочлены над кольцами и полями. Степень полинома. Нормированный полином. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
19. Какие алгебраические структуры образуют многочлены над кольцами? (ОПК 2, ИОПК 2.1)
20. Деление многочленов. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Обобщение алгоритма Евклида. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
21. Вычислительные трудности с алгоритмом Евклида. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
22. Области единственного разложения на множители. Обратимые и простые элементы. Примеры. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
23. Какие алгебраические структуры образуют многочлены над областями единственного разложения на множители? (ОПК 2, ИОПК 2.1)

За ответ на вопрос он получает от 0 до 2 баллов.

Также он должен решить две задачи из следующего списка.

ЗАЧЕТНЫЕ ЗАДАЧИ

33. Покажите, что 2 и 3 – единственные числа n, меньшие 1000, для которых
3^n + 4^n + ... + (n + 2)^n = (n + 3)^n. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

34. Число называется Harshad-числом, если оно делится на сумму его цифр (например, 12 есть Harshad-число, так как оно делится на 1+2=3). Найдите все двухзначные Harshad-числа. Как много существует пятизначных Harshad-чисел?
Harshad переводится с санскрита, как «дающее радость». Эти числа определил и назвал индийский математик D. Kaprekar.
Используйте функцию IntegerDigits. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

35. Найдите все числа в первом миллионе, которые имеют следующее свойство: если $n = d_1d_2 ...d_k$, то $n = d_1! + d_2! + ...+ d_k!$ (например, 145 = 1! + 4! + 5!).
Используйте функции IntegerDigits, Apply, Select. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

36. Число называется совершенным, если оно равно сумме его собственных делителей, например, $6 = 1 + 2 + 3$, но $18 \neq 1 + 2 + 3 + 6 + 9$. Напишите программу, находящую все совершенные числа до 10000. Используйте функции Divisors и Most. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

37. Среди первых 100000 найдите наибольшее число, которое делится на все положительные числа $\leq \sqrt{n}$.
Используйте функции Select, Range, Mod, LCM, Apply, Floor, Sqrt и анонимную функцию, чтобы записать программу в одну строчку. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

38. Покажите, что сумма всех делителей числа
6086555670238378989670371734243169622657830773351885970528324860512791691264
есть совершенное число.
Число называется совершенным, если оно равно сумме его собственных делителей, например, $6 = 1 + 2 + 3$, но $18 \neq 1 + 2 + 3 + 6 + 9$.
Используйте функции Divisors и Most. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

39. Определите функцию Коллотца:
collatz[x_Integer?EvenQ]:=x/2
collatz[x_Integer]:=3x+1
L. Collatz в 1937 высказал гипотезу, что если эту функцию многократно применять к любому натуральному числу, то, в конце концов, получим 1.
Найдите, сколько раз функцию Коллатца необходимо применять к числам меньшим 200, чтобы получить 1. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

40. Напишите функцию для конвертирования $\{x_1, x_2, . . . , x_k, x_{k+1}\}$ в $\{x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, . . . , x_k \to x_{k+1}\}$.
Используйте функции RotateLeft, Rule, Inner и Most. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

41. Докажите тождество Эйлера
$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (t^2 + x^2 + y^2 + z^2) =$
$= (a\, t + b\, z - c\, y + d\, x)^2 + (a\, y + b\, x + c\, t - d\, z)^2 + (a\, z - b\, t + c\, x + d\, y)^2 + (a\, x - b\, y - c\, z - d\, t)^2.$
(ОПК 2, ИОПК 2.2)

42. Покажите, что для целых a, b и $n > 0$ выполняется равенство
$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

43. Пусть z и $\overline{z}$ – два сопряженных целых гауссовых числа. С помощью Mathematica, перебирая случайным образом z, вычисляйте gcd(z, $\overline{z}$). Выскажите гипотезу о значении наибольшего общего делителя сопряженных чисел. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

44. Найдите 10 простых чисел k, для которых число Мерсенна $2^k - 1$ не является простым. Используйте Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

45. Найдите 10 простых чисел k, для которых число Мерсенна $2^k - 1$ является простым. Используйте Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

46. Может случиться так, что данный многочлен принимает простые значения на определенных промежутках довольно часто. Покажите при помощи вычислений, что многочлен Дресса и Оливье

$$f(x) = x^2 + x - 1354363$$

обладает тем потрясающим свойством, что для случайного целого числа $x \in [1, 10^4]$ вероятность простоты числа величины $|f(x)|$ превосходит ½. Занимательное следствие таково: если Вам удастся запомнить семизначный телефонный номер 135–43–63, то тем самым Вы запомните и несколько тысяч простых чисел. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

47. Докажите, что $\gcd(m, n) \cdot \operatorname{lcm}(m, n) = m \cdot n$. Для натуральных чисел можно доказать, используя Mathematica.

Покажите, что в общем случае для трех целых чисел
$abc \neq \gcd(a, b, c) \operatorname{lcm}(a, b, c)$. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

48. Пусть p_n обозначает n-е простое число. Верно ли, что все числа вида $p_1p_2\cdots p_n + 1$ являются простыми? (ОПК 2, ИОПК 2.2)

49. Определим $r(n) = (10^n - 1)/9$. Десятичными цифрами чисел $r(n)$ являются только единицы; их n штук.

Известно, что если число n составное, то число $r(n)$ – тоже составное.

Рассмотрите все простые числа n в интервале от 5 до 500 включительно. Среди них имеется только три числа n, для которых соответствующие $r(n)$ не удовлетворяют тесту на разложимость 1.1. глава 8 (можно взять $a = 2$). Найдите эти три $r(n)$. Являются ли эти числа простыми? (ОПК 2, ИОПК 2.3)

50. Найдите все псевдопростые числа Ферма по основанию 2, 3 и 5 меньшие 10 000. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

51. Найдите все числа Кармайкла, не превышающие 500 000. Проверьте, выполнено ли уже соотношение (3) из главы 8 для n = 500 000. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

52. Если u и v – гауссовые целые числа u и v такие, что норма $N(u)$ делится нацело на $N(v)$, то u делится на v. Найдите контрпример с помощью Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

53. Число x при делении на 2002 дает остаток 2001, а при делении на 2001 – остаток 1901. Какой остаток дает x при делении на $2002 \cdot 2001$? (ОПК 2, ИОПК 2.2)

54. Пусть $\sigma(n)$ – сумма всех делителей целого числа n. С помощью Mathematica выскажите гипотезу, для каких натуральных чисел $\sigma(n) + \varphi(n) = 2n$. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

55. Доказать, что среднеарифметическое двух неотрицательных чисел не меньше среднегеометрического этих чисел. Используйте Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

56. Для натурального $n > 1$ пусть $f(n)$ равно 1 плюс сумма простых делителей числа n, причем каждое простое число в сумме берется такое число раз, какое стоит в показателе степени в разложении на простые множители числа n. Например, так как $680400 = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$, то $f(680400) = 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 7 = 41$.

Имеем $f(7) = 8$ и $f(8) = 7$. Проверьте, что для любого натурального $6 < n \le 1000$ последовательность $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), f(f(f(f(n)))), \ldots$ всегда приводит к циклу (7, 8). (ОПК 2, ИОПК 2.3)

57. Введем обозначение S_n для суммы первых n простых чисел $S_n = 2 + 3 + 5 + \ldots + p_n$. Проверьте, что для любого натурального $1 < n \le 1000$ между S_n и S_{n+1} всегда есть точный квадрат. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

58. Найти все натуральные числа $n \le 1000$, для которых выполнено равенство

$\lfloor n/2\rfloor + \lfloor n/3\rfloor + \lfloor n/5\rfloor = n$. Постройте график функции $f(n) = \lfloor n/2\rfloor + \lfloor n/3\rfloor + \lfloor n/5\rfloor - n$ для натуральных n, $1 \le n \le 200$. Выскажите гипотезу – какие натуральные числа являются решениями уравнения $\lfloor n/2\rfloor + \lfloor n/3\rfloor + \lfloor n/5\rfloor = n$.
(ОПК 2, ИОПК 2.3)

59. Дано рекурсивное определение функции $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, и для $n \ge 2$ имеем $f(n + 1) = f(n) + 2f(n - 1)$. Найдите замкнутую форму для f. (Выражение для величины $f(n)$ представлено в замкнутой форме, если ее можно вычислить с помощью некоторого фиксированного числа «известных» стандартных операций, независимо от n). Для решения задачи: 1) напишите рекурсивное определение для функции f; 2) вычислите первые 10 значений $f(n)$; к полученному списку примените функцию FindSequenceFunction. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

60. Пусть функция $g(a, n)$, где n – натуральное число, определена, как

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$$

(«башня» содержит n символов a).

1. Дайте два определения этой функции: рекурсивное и с помощью функции Nest.
2. Вычислите $g(2, 4)$ и $g(3, 3)$. Найдите количество десятичных цифр в $g(2, 5)$.

(ОПК 2, ИОПК 2.3)

61. Для каких натуральных n выполнено $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$? Проверьте для первой сотни натуральных чисел. Выскажите гипотезу. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

62. Для каких натуральных n выполнено $\varphi(n) = n/2$? Проверьте для первой тысячи натуральных чисел. Выскажите гипотезу. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

63. Исследуйте помощью Mathematica, для каких n, не превосходящих 500, выполнено n делится на $\varphi(n)$.
Выскажите гипотезу. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

64. Для $n \le 100$ вычислите $\varphi(n)$ и $\varphi(2n)$. Выскажите гипотезу, как связаны $\varphi(n)$ и $\varphi(2n)$. Проверьте для $n \le 10000$. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

65. Проверьте открытое утверждение: $n > 1$ – простое число тогда и только тогда,
когда $\varphi(n) \mid (n - 1)$. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

За решения двух предложенных задач студент получает суммарно от 0 до 4 баллов.

Текущий контроль при полном выполнении контрольных индивидуальных работ в семестре суммарно оценивается суммарно в 4 балла. При правильном ответе на вопрос и правильном решении двух задач в время зачета студент может получить еще 6 баллов. И оценка при промежуточной аттестации определяется как сумма двух указанных выше балов.

Баллы переводятся в оценку следующим образом:
От 0 до 4 баллов – «неудовлетворительно».
5 или 6 баллов – «удовлетворительно».
7 или 8 баллов – «хорошо».
9 или 10 баллов – «отлично».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний могут быть использованы для формирования программы ГИА (программы государственного экзамена), а также экспертом Рособрнадзора при проведении проверки диагностической работы по оценки уровня форсированности компетенций обучающихся (при контрольно-надзорной проверке).

Вопросы данного раздела показывают вклад дисциплины в образовательный результат образовательной программы. Объем заданий в данном разделе зависит как от количества формируемых индикаторов достижения компетенций, так и от объема дисциплины по учебному плану.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Достоинства и особенности Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
2. Структура системы Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
3. Главное меню Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
4. Система помощи Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
5. Палитры. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
6. Сессии и вычисления. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
7. Задача представления данных. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
8. Канонические представления. Нормальные представления. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
9. Связь между каноническим и нормальным представлением. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
10. Отношения эквивалентности на множестве выражений. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
11. Естественность представления. Метод Брауна. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
12. Неразрешимые проблемы для представления данных. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
13. Унифицированность представления различных математических объектов в системе Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
14. Выражения. Полная форма. Голова. Доступ к частям выражений. Деревья. (ОПК 2, ИОПК 2.1)
15. Автоматическое упрощение. Автоматическое упрощение в системе Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.1)

ЗАДАЧИ

1. Число называется совершенным, если оно равно сумме его собственных делителей, например, $6 = 1 + 2 + 3$, но $18 \neq 1 + 2 + 3 + 6 + 9$. Напишите программу, находящую все совершенные числа до 10000. Используйте функции Divisors и Most. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
2. Среди первых 100000 найдите наибольшее число, которое делится на все положительные числа $\leq \sqrt{n}$.
   Используйте функции Select, Range, Mod, LCM, Apply, Floor, Sqrt и анонимную функцию, чтобы записать программу в одну строчку. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
3. Покажите, что сумма всех делителей числа 6086555670238378989670371734243169622657830773351885970528324860512791691264 есть совершенное число. Число называется совершенным, если оно равно сумме его собственных делителей, например, $6 = 1 + 2 + 3$, но $18 \neq 1 + 2 + 3 + 6 + 9$. Используйте функции Divisors и Most. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
4. Определите функцию Коллотца:
   collatz[x_Integer?EvenQ]:=x/2
   collatz[x_Integer]:=3x+1
   L. Collatz в 1937 высказал гипотезу, что если эту функцию многократно применять к любому натуральному числу, то, в конце концов, получим 1.
   Найдите, сколько раз функцию Коллатца необходимо применять к числам меньшим 200, чтобы получить 1. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
5. Напишите функцию для конвертирования $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ в $\{x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \dots, x_k \to x_{k+1}\}$.
   Используйте функции RotateLeft, Rule, Inner и Most. (ОПК 2, ИОПК 2.3)

6. Докажите тождество Эйлера

   $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,(t^2 + x^2 + y^2 + z^2) = (a\,t + b\,z - c\,y + d\,x)^2 + (a\,y + b\,x + c\,t - d\,z)^2 +$

   $+ (a\,z - b\,t + c\,x + d\,y)^2 + (a\,x - b\,y - c\,z - d\,t)^2$. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
7. Покажите, что для целых a, b и $n > 0$ выполняется равенство
   $b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
8. Пусть z и $\bar{z}$ – два сопряженных целых гауссовых числа. С помощью Mathematica, перебирая случайным образом z, вычисляйте gcd(z, $\bar{z}$). Выскажите гипотезу о значении наибольшего общего делителя сопряженных чисел. (ОПК 2, ИОПК 2.3)
9. Найдите 10 простых чисел k, для которых число Мерсенна $2^k - 1$ не является простым. Используйте Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
10. Найдите 10 простых чисел k, для которых число Мерсенна $2^k - 1$ является простым. Используйте Mathematica. (ОПК 2, ИОПК 2.2)
11. Может случиться так, что данный многочлен принимает простые значения на определенных промежутках довольно часто. Покажите при помощи вычислений, что многочлен Дресса и Оливье

    $$f(x) = x^2 + x - 1354363$$

    обладает тем потрясающим свойством, что для случайного целого числа
    $x \in [1, 10^4]$ вероятность простоты числа величины $|f(x)|$ превосходит ½.
    Занимательное следствие таково: если Вам удастся запомнить семизначный телефонный номер 135–43–63, то тем самым Вы запомните и несколько тысяч простых чисел. (ОПК 2, ИОПК 2.3)
12. Докажите, что $\gcd(m, n) \cdot \mathrm{lcm}(m, n) = m \cdot n$. Для натуральных чисел можно доказать, используя Mathematica.
    Покажите, что в общем случае для трех целых чисел
    $abc \neq \gcd(a, b, c)\ \mathrm{lcm}(a, b, c)$. (ОПК 2, ИОПК 2.2)

Информация о разработчиках

Зюзьков Валентин Михайлович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, доцент кафедры ВМ и КМ.