Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физико-технический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
Ю.Н. Рыжих

Оценочные материалы по дисциплине

Приближенные вычисления

по направлению подготовки / специальности

15.03.03 Прикладная механика
Направленность (профиль) подготовки/ специализация:

Компьютерный инжиниринг конструкций, биомеханических систем и материалов

Форма обучения
Очная

Квалификация
Инженер, инженер-разработчик

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОПОП
В.А. Скрипняк
Е.С. Марченко

Председатель УМК
В.А. Скрипняк

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

БК-1 Способен применять общие и специализированные компьютерные программы при решении задач профессиональной деятельности;

ОПК-2 Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РОБК-1.1 Знает правила и принципы применения общих и специализированных компьютерных программ для решения задач профессиональной деятельности

РОБК-1.2 Умеет применять современные IT-технологии для сбора, анализа и представления информации; использовать в профессиональной деятельности общие и специализированные компьютерные программы

РООПК-2.1 Знает методику выявления естественнонаучной сущности проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и методику привлечения физико-математического аппарата и современные компьютерных технологий для их решения

РООПК-2.2 Умеет выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

3 семестр

– контрольная работа

Контрольная работа №1 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа №1 состоит из 1 задачи.

Примеры задач.

С какой погрешностью следует измерить длину *b* прямоугольника со сторонами *a*=4.3 м и *b*=8.5 м, чтобы погрешность вычисления площади прямоугольника не превысила 0.3 м^2? Ответ записать с точность 0.001 м.

Ответ: 0.035 м.

Определить число верных значащих цифр в числе 485.623, если его относительная погрешность равна 0.2%.

Ответ: две верных значащих цифры 4 и 8.

Контрольная работа №2 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)

Контрольная работа №2 состоит из 1 задачи.

Примеры задач.

Методом неопределенных коэффициентов получить формулы численного дифференцирования и оценить погрешность аппроксимации:

$$Y_0'' = C_0Y_0 + C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 + R_0''$$

Ответ: $Y_0'' = \dfrac{2Y_0 - 5Y_1 + 4Y_2 - Y_3}{h^2} + \dfrac{11}{12}h^2Y^{(IV)}(\xi)$

На отрезке [0;4] методом наименьших квадратов провести аппроксимацию функции $y = \sqrt{x}$ полиномом второй степени $y = ax^2 + bx + c$. Найти значение меры квадратичного отклонения R.

Ответ: $y = -\frac{1}{14}x^2 + \frac{24}{35}x + \frac{12}{35}$, R=6.53·10^{-3}.

– лабораторная работа

Лабораторная работа №1 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)

Аппроксимация функций

Примеры заданий:

Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. В качестве аппроксимирующей функции взять $F(x) = ax^b$. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.

X	1.1	1.2	2.3	3.4	5
$f(x)$	1.21	1.44	5.29	11.56	25

Ответ: $y = x^2$

Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.

X	0.3	1.2	3.3	5.4	8.5
$f(x)$	0.1	0.2	0.4	0.9	3.1

Ответ: $y = 0.1041 \cdot \exp(0.4015 \cdot x)$

Лабораторная работа №2 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)

Численное интегрирование

Примеры заданий:

Вычислить определенный интеграл с погрешностью ε=10^{-4} методом центральных прямоугольников и методом Симпсона $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

Ответ: 0.3037

Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра и Гаусса-Чебышева для n=1, 2, 3.

Ответ:

n	1	2	3
Метод Гаусса-Лежанлра	2.00000	2.12132	2.27778
Метод Гаусса-Чебышева	3.14159	2.56510	2.63041

Лабораторная работа №3 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)
Численное дифференцирование

Примеры заданий:

Получить формулу численного дифференцирования y_1''' с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность R в зависимости от шага h.

Ответ:

$$y_1''' = (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)/h^3 \;;$$

$$R \le \frac{h}{2} \max_{x_0 \le \xi \le x_3} \left| y^{(IV)}(\xi) \right| + 8\frac{\varepsilon}{h^3}$$

Получить формулу численного дифференцирования y_1'' с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 4$. Оценить погрешность R в зависимости от шага h.

Ответ:

$$y_1'' = (11y_0 - 20y_1 + 6y_2 + 4y_3 - y_4)/(12h^2)\;;$$

$$R \le \frac{h^3}{12} \max_{x_0 \le \xi \le x_4} \left| y^{(V)}(\xi) \right| + \frac{21}{6}\frac{\varepsilon}{h^2}$$

Лабораторная работа №4 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)
Решение систем линейных алгебраических уравнений

Примеры заданий:

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{aligned} 2.7\, x_1 + 3.3\, x_2 + 1.3\, x_3 &= 2.1 \\ 3.5\, x_1 + 1.7\, x_2 + 2.8\, x_3 &= 1.7 \\ 4.1\, x_1 + 5.8\, x_2 + 1.7\, x_3 &= 0.8. \end{aligned}$$

Ответ:

Преобразуем исходную систему уравнений к диагональному доминированию:

$$\begin{aligned} 7.6\, x_1 + 4.1\, x_2 + 1.1\, x_3 &= 2.5 \\ -0.8\, x_1 + 5.0\, x_2 - 1.5\, x_3 &= 0.4 \\ 1.3\, x_1 + 0.8\, x_2 + 4.3\, x_3 &= 3.4. \end{aligned}$$

Переписываем в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= (-4.1\, x_2 - 1.1\, x_3 + 2.5)/\, 7.6 \\ x_2 &= (0.8\, x_1 + 1.5\, x_3 + 0.4)/\, 5.0 \\ x_3 &= (-1.3\, x_1 - 0.8\, x_2 + 3.4)/\, 4.3 \end{aligned}$$

Расставляем итерационные индексы:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (-4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)} + 2.5)/7.6 \\ x_2^{(k+1)} &= (0.8x_1^{(k)} + 1.5x_3^{(k)} + 0.4)/5.0 \\ x_3^{(k+1)} &= (-1.3x_1^{(k)} - 0.8x_2^{(k)} + 3.4)/4.3 \end{aligned}$$

Численное решение:

k	x_1	x_2	x_3
0	1	1	1
1	–0.355263158	0.54	0.302325581
2	–0.006126071	0.113855569	0.797637699
3	0.152077723	0.318311138	0.771367311
4	0.045581617	0.335742629	0.685500011
5	0.048605948	0.292943062	0.714453441

6	0.067504561	0.302112984	0.721501818
7	0.061537469	0.307251275	0.714082252
8	0.059839381	0.304070671	0.714930295
9	0.06143249	0.30405339	0.716035411

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$2.7\,x_1 + 3.3\,x_2 + 1.3\,x_3 = 2.1$$
$$3.5\,x_1 + 1.7\,x_2 + 2.8\,x_3 = 1.7$$
$$4.1\,x_1 + 5.8\,x_2 + 1.7\,x_3 = 0.8.$$

Ответ:

Преобразуем исходную систему уравнений к диагональному доминированию:

$$7.6\,x_1 + 4.1\,x_2 + 1.1\,x_3 = 2.5$$
$$-0.8\,x_1 + 5.0\,x_2 - 1.5\,x_3 = 0.4$$
$$1.3\,x_1 + 0.8\,x_2 + 4.3\,x_3 = 3.4.$$

Переписываем в виде:

$$x_1 = (-4.1\,x_2 - 1.1\,x_3 + 2.5)/\,7.6$$
$$x_2 = (0.8\,x_1 + 1.5\,x_3 + 0.4)/\,5.0$$
$$x_3 = (-1.3\,x_1 - 0.8\,x_2 + 3.4)/\,4.3$$

Расставляем итерационные индексы:

$$x_1^{(k+1)} = (-4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)} + 2.5)/7.6$$
$$x_2^{(k+1)} = (0.8x_1^{(k+1)} + 1.5x_3^{(k)} + 0.4)/5.0$$
$$x_3^{(k+1)} = (-1.3x_1^{(k+1)} - 0.8x_2^{(k+1)} + 3.4)/4.3$$

Численное решение:

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	–0.355263158	0.323157895	0.837980416
2	0.033325549	0.336726213	0.717975771
3	0.043374892	0.302332714	0.721336388
4	0.061442874	0.306231776	0.715148568
5	0.060235038	0.304182177	0.715895049
6	0.0612327	0.304565747	0.715522068

4-й семестр

– контрольная работа

Контрольная работа №1 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа №1 состоит из 1 задачи.

Примеры задач.

Построить характеристический многочлен матрицы методом неопределенных коэффициентов: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$.

Представить матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ в виде произведения $L \cdot U$.

Ответ: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -11 & -1.4 \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Контрольная работа №2 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа №2 состоит из 1 задачи.

Примеры задач.

Записать неявную разностную схему Эйлера для системы ОДУ:

$\frac{dy}{dx} = -100y; \quad \frac{dz}{dx} = y - z$.

Ответ: $y_{k+1} = \frac{y_k}{1+100h}$; $z_{k+1} = \frac{y_k h}{(1+100h)(1+h)} + \frac{z_k}{1+h}$

Дана краевая задача $y'' + 2y' + y = -2, \;\; 0 < x < 1, \;\; y(0) = 0, \; y'(1) = 0.$ Свести данную краевую задачу к двум задачам Коши, представив решение в виде $y(x) = u(x) + C \cdot v(x)$.

Ответ: $u'' + 2u' + u = -2, \;\; 0 < x < 1, \; u(0) = 0, \; u'(0) = 0.$

$v'' + 2v' + v = 0, \;\; 0 < x < 1, \; v(0) = 0, \; v'(0) = K.$

$C = -u'(1)/v'(1)$.

– лабораторная работа

Лабораторная работа №1 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)

Решение нелинейного уравнения

Примеры заданий:

Решить нелинейное уравнение $e^x - 6x = 5$ методом хорд и методом простых итераций. Сравнить количество итераций, требуемых для нахождения корня с точностью 10^{-5}.

Ответ:

Метод простых итераций: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где $\varphi(x) = \frac{e^x - 5}{6}$, $|\varphi'(x)| < 1, \; x \in [-1; 0]$.

Метод хорд $x_{k+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a)$, где $a = -1, \;\; f(x) = e^x - 6x - 5$

Номер итерации	Метод простых итераций	Метод хорд
0	0	0
1	–0.666667	–0.745173
2	–0.747764	–0.754904
3	–0.754429	–0.754997
4	–0.754954	–0.754998
5	–0.754995	
6	–0.754998	

Решить нелинейное уравнение $e^x + x^2 - 2 = 0$ методом половинного деления и методом Ньютона. Сравнить количество итераций, требуемых для нахождения корня с точностью 10^{-5}.

Ответ:

Метод Ньютона: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Метод половинного деления $c_k = \left(a_k + b_k\right)/2$, если $f(c_k) \cdot f(a_k) < 0$, то $a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = c_k$, иначе $a_{k+1} = c_k,\ b_{k+1} = b_k$.

Номер итерации	Метод Ньютона	Метод половинного деления	
		a_k	b_k
0	1	0.000000	1.000000
1	0.635825	0.500000	1.000000
2	0.543157	0.500000	0.750000
3	0.537297	0.500000	0.625000
4	0.537274	0.500000	0.562500
5	0.537274	0.531250	0.562500
6		0.531250	0.546875
7		0.531250	0.539063
8		0.535156	0.539063
9		0.537109	0.539063
10		0.537109	0.538086
11		0.537109	0.537598
12		0.537109	0.537354
13		0.537231	0.537354
14		0.537231	0.537292
15		0.537262	0.537292
16		0.537262	0.537277
17		0.537270	0.537277

Лабораторная работа №2 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)
Решение системы нелинейных уравнений

Примеры заданий:

Решить систему нелинейных уравнений методом простых итераций с точностью $\varepsilon < 10^{-4}$.

$f_1(x,y) = \mathrm{tg}(xy + 0.4) - x^2 = 0$

$f_2(x,y) = 0.6x^2 + 2y^2 - 1 = 0,$

где $\varepsilon = \max\left(\left|f_1\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)\right|, \left|f_2\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)\right|\right)$

Ответ:

Формулы для решения методом простых итераций:

$$x^{(k+1)} = \frac{\mathrm{arctg}\left(\left(x^{(k)}\right)^2\right) - 0.4 + x^{(k)}y^{(k)}}{2y^{(k)}}$$

$$y^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1 - 0.6\left(x^{(k)}\right)^2}{2}}$$

Начальное приближение $x^{(0)} = -0.5,\ \ y^{(0)} = 0.5$.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\lvert f_1(x^{(k)},y^{(k)})\rvert$	$\lvert f_2(x^{(k)},y^{(k)})\rvert$
0	–0.5	0.5	$9.9\cdot10^{-2}$	$3.5\cdot10^{-1}$
1	–0.405021	0.651920	$2.7\cdot10^{-2}$	$5.2\cdot10^{-2}$
2	–0.384593	0.671407	$5.2\cdot10^{-3}$	$9.7\cdot10^{-3}$
3	–0.380821	0.675001	$1.1\cdot10^{-3}$	$1.7\cdot10^{-3}$
4	–0.380025	0.675642	$1.9\cdot10^{-4}$	$3.6\cdot10^{-4}$
5	–0.379886	0.675777	$4.2\cdot10^{-5}$	$6.3\cdot10^{-5}$

Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона с точностью $\varepsilon < 10^{-4}$.

$f_1(x,y) = \mathrm{tg}(xy + 0.4) - x^2 = 0$

$f_2(x,y) = 0.6x^2 + 2y^2 - 1 = 0,$

где $\varepsilon = \max\left(\left|f_1\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)\right|, \left|f_2\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)\right|\right)$

Формулы для решения методом Ньютона:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{J^{(k)}}\left(f_1(x,y)\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} - f_2(x,y)\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\right)^{(k)}$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{1}{J^{(k)}}\left(f_2(x,y)\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} - f_1(x,y)\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}\right)^{(k)},$$

где

$$J = \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}.$$

Начальное приближение $x^{(0)} = -0.5,\ \ y^{(0)} = 0.5$.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\lvert f_1(x^{(k)},y^{(k)})\rvert$	$\lvert f_2(x^{(k)},y^{(k)})\rvert$
0	–0.5	0.5	$9.9\cdot10^{-2}$	$3.5\cdot10^{-1}$
1	–0.361293	0.716612	$1.2\cdot10^{-2}$	$1.1\cdot10^{-1}$
2	–0.379216	0.677136	$4.0\cdot10^{-4}$	$3.3\cdot10^{-3}$
3	–0.379848	0.675808	$4.6\cdot10^{-7}$	$3.8\cdot10^{-6}$

Лабораторная работа №3 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)
Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Примеры заданий:

Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений на промежутке t ∈ [0, 1] методом Эйлера 1-го порядка точности. Сравнить решение с точным решением и определить порядок точности метода.

$$x'(t) = 4x(t) + y(t) - e^{2t};\ x(0)=3$$
$$y'(t) = y(t) - 2x(t);\ y(0)= -3$$

Точное решение системы:

$$X(t) = e^{2t} + e^{3t} + (t + 1)\, e^{2t}$$
$$Y(t) = -2e^{2t} - e^{3t} - 2t\, e^{2t}$$

Метод Эйлера:

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + hg(t_k, x_k, y_k)$$

t_i	x_i	y_i	$X(t_i)$	$Y(t_i)$
0	3	–3	3	–3
0.1	3.8	–3.9	3.9148	–4.03694
0.2	4.80786	–5.05	5.10413	–5.4025
0.3	6.07682	–6.51657	6.65048	–7.19711
0.4	7.67368	–8.38359	8.66142	–9.55163
0.5	9.68224	–10.75669	11.27739	–12.63653
0.6	12.20764	–13.76881	14.68195	–16.67402
0.7	15.3818	–17.58721	19.11521	–21.95385
0.8	19.37028	–22.4223	24.89167	–28.85409
0.9	24.38086	–28.53858	32.42371	–37.86839
1	30.67438	–36.26861	42.25271	–49.64176

$$\varepsilon_x(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - X(t_k)|;\ \varepsilon_y(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|y_k - Y(t_k)|$$

$$\alpha = \frac{\ln(\varepsilon_x(10)) - \ln(\varepsilon_x(20))}{\ln(h_1) - \ln(h_2)},\ h_1 = 1/10,\quad h_2 = 1/20.$$

$$\alpha_x = \frac{\ln(3.49179) - \ln(1.83173)}{\ln(0.1) - \ln(0.05)} \approx 0.9308,\qquad \alpha_y = \frac{\ln(4.06245) - \ln(2.11857)}{\ln(0.1) - \ln(0.05)} \approx 0.9393$$

Порядок точности равен 0.93.

Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений на промежутке t ∈ [0, 1] методом Хойна. Сравнить решение с точным решением и определить порядок точности метода.

$$x'(t) = 4x(t) + y(t) - e^{2t};\ x(0)=3$$
$$y'(t) = y(t) - 2x(t);\ y(0)= -3$$

Точное решение системы:

$$X(t) = e^{2t} + e^{3t} + (t + 1)\, e^{2t}$$
$$Y(t) = -2e^{2t} - e^{3t} - 2t\, e^{2t}$$

Метод Хойна:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, x_k, y_k) + f(t_{k+1}, x^*_{k+1}, y^*_{k+1})\right]$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[g(t_k, x_k, y_k) + g(t_{k+1}, x^*_{k+1}, y^*_{k+1})\right]$$

где $x^*_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k)$; $y^*_{k+1} = y_k + hg(t_k, x_k, y_k)$.

t_i	x_i	y_i	$X(t_i)$	$Y(t_i)$
0	3	–3	3	–3
0.1	3.90393	–4.025	3.9148	–4.03694
0.2	5.07556	–5.37114	5.10413	–5.4025
0.3	6.59415	–7.13537	6.65048	–7.19711
0.4	8.56265	–9.44355	8.66142	–9.55163
0.5	11.11496	–12.4591	11.27739	–12.63653
0.6	14.42531	–16.39427	14.68195	–16.67402
0.7	18.72076	–21.52485	19.11521	–21.95385
0.8	24.29739	–28.20935	24.89167	–28.85409
0.9	31.5418	–36.91405	32.42371	–37.86839
1	40.95926	–48.24584	42.25271	–49.64176

$$\varepsilon_x(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|x_k - X(t_k)\right|;\ \varepsilon_y(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|y_k - Y(t_k)\right|$$

$$\alpha = \frac{\ln(\varepsilon_x(10)) - \ln(\varepsilon_x(20))}{\ln(h_1) - \ln(h_2)},\ h_1 = 1/10,\quad h_2 = 1/20.$$

$$\alpha_x = \frac{\ln(0.37777) - \ln(0.09582)}{\ln(0.1) - \ln(0.05)} \approx 1.9791,\qquad \alpha_y = \frac{\ln(0.40943) - \ln(0.10375)}{\ln(0.1) - \ln(0.05)} \approx 1.9805$$

Порядок точности равен 1.98.

Лабораторная работа №4 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)
Решение краевой задачи

Примеры заданий:

Решить краевую задачу

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x},\quad 0 < x < 1$$

$$y'(0) - y(0) = 0.6,\quad y'(1) + y(1) = 4e^3 + e^4$$

конечно-разностным методом. Численное решение сравнить с точным решением:

$$y(x) = e^{-x} + e^{3x} + 0.2e^{4x}.$$

Ответ:

Конечно-разностный аналог уравнения

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right)y_{i-1} + \left(-\frac{2}{h^2} - 3\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right)y_{i+1} = e^{4x_i},\ 1 \le i \le n-1,$$

$$x_i = i \cdot h,\ \ h = 1/n.$$

Конечно-разностный аналог краевого условия для x=0:

$$\left(-5 - \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right)y_0 + \frac{2}{h^2}y_1 = 2.2 + \frac{1.2}{h}$$

Конечно-разностный аналог краевого условия для x=1:

$$\frac{2}{h^2}y_{n-1} + \left(-1 - \frac{2}{h} - \frac{2}{h^2}\right)y_n = e^4 - 2\left(\frac{1}{h} - 1\right)\left(4e^3 + e^4\right)$$

Численное решение

x_i	y_i	$y(x_i)$
0	2.16998	2.2
0.1	2.51223	2.55306
0.2	3.03085	3.08596
0.3	3.79047	3.86444
0.4	4.88214	4.98104
0.5	6.43417	6.56603
0.6	8.62768	8.80309
0.7	11.71869	11.95168
0.8	16.06994	16.37901
0.9	22.19639	22.60595
1	30.83079	31.37305

Решить краевую задачу

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}, \quad 0 < x < 1$$

$$y'(0) - y(0) = 0.6, \quad y'(1) + y(1) = 4e^3 + e^4$$

Методом стрельбы. Численное решение сравнить с точным решением:

$$y(x) = e^{-x} + e^{3x} + 0.2e^{4x}.$$

Ответ:

Исходное уравнение переписываем в виде системы ОДУ первого порядка:

$$y' = z$$

$$z' = 2z + 3y + e^{4x}$$

$$z(0) - y(0) = 0.6, \quad z(1) + y(1) = 4e^3 + e^4$$

Решаем задачу Коши:

$$y' = z$$

$$z' = 2z + 3y + e^{4x}$$

$$y(0) = \xi$$

$$z(0) = 0.6 + \xi$$

Ищем такое значение ξ, чтобы выполнилось равенство

$$F(\xi) \equiv z(1,\xi) + y(1,\xi) - 4e^3 - e^4 = 0\,.$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n - F(\xi_n)\cdot\delta \big/ \big(F(\xi_n+\delta) - F(\xi_n)\big),\ \delta = 0.001$$

Численное решение

x_i	y_i	$y(x_i)$
0	2.31822	2.2
0.1	2.67900	2.55306
0.2	3.22204	3.08596
0.3	4.01265	3.86444
0.4	5.14232	4.98104
0.5	6.73933	6.56603
0.6	8.98384	8.80309
0.7	12.12923	11.95168
0.8	16.53277	16.37901
0.9	22.69931	22.60595
1	31.34406	31.37305

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Оценка «зачтено» выставляется, если выполнено правильно не менее 90% задания.

Результаты лабораторных работ определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если студент выполнил правильно задание, понимает ход выполнения программы на компьютере.

Оценка «хорошо» выставляется, если студент допустил небольшие ошибки при выполнении задания, понимает ход выполнения программы на компьютере.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент допустил ошибки при выполнении задания, плохо понимает ход выполнения программы на компьютере.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент не может объяснить задание и алгоритм, по которому выполняется программа на компьютере.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

3 семестр

Экзамен проводится в форме теста. К тесту допускаются студенты, получившие по двум контрольным работам положительные оценки. Тест состоит из 35 вопросов, проверяющих РООПК-2.1, РООПК-2.2. В тесте присутствую как вопросы, проверяющие знание теоретического материала, так и вопросы, проверяющие умение решать задачи.

Перечень теоретических вопросов

1. Источники и классификация погрешностей. Абсолютная и относительная погрешности.
2. Погрешность результатов арифметических операций и элементарных функций. Обратная задача теории погрешности.
3. Понятие аппроксимации. Вычисление значения полиномов по схеме Горнера. Аппроксимация некоторых трансцендентных функций с помощью рядов.
4. Экономизация степенных рядов при помощи полиномов Чебышева.
5. Дробно-рациональные приближения.
6. Аппроксимация по методу наименьших квадратов. Квадратичное аппроксимирование обобщенными полиномами.
7. Метод наименьших квадратов в нелинейном случае.
8. Постановка задачи интерполирования. Интерполяционный полином Лагранжа.
9. Интерполяционный полином Ньютона. Погрешность интерполяционных полиномов.
10. Интерполирование функций многих переменных. Нелинейная интерполяция. Обратное интерполирование.
11. Интерполирование сплайнами.
12. Получение формул численного дифференцирования с помощью рядов Тейлора.
13. Получение формул численного дифференцирования с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.
14. Получение формул численного дифференцирования с помощью интерполяционного полинома Ньютона.
15. Метод неопределенных коэффициентов. Метод Рунге оценки погрешности и получения формул численного дифференцирования.
16. О некорректности операции численного дифференцирования.
17. Понятие квадратурных формул. Формула прямоугольников. Формула трапеций.
18. Формула Симпсона. Оценка погрешности методом Рунге.
19. Автоматический выбор шага интегрирования.
20. Метод неопределенных коэффициентов получения квадратурных формул.

21. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.
22. Квадратурные формулы Гаусса. Формула Гаусса-Чебышева. Формула Гаусса-Лежандра.
23. Формула Гаусса-Лагерра. Формула Гаусса-Эрмита.
24. Вычисление интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Вычисление интегралов от неограниченных функций.
25. Приближенное вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло.
26. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
27. Связь метода Гаусса с разложением матрицы на множители. Схема Халецкого.
28. Вычисление определителя и обратной матрицы.
29. Метод прогонки.
30. Понятие нормы вектора, нормы матрицы. Плохо обусловленные системы. Мера обусловленности.
31. Метод простых итераций и метод Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений.
32. Прямой способ нахождения собственных значений матрицы.
33. Метод Леверрье определения коэффициентов характеристического полинома.
34. Метод неопределенных коэффициентов построения характеристического полинома.
35. Итерационный способ одновременного нахождения собственных значений и собственных векторов.

Примеры задач

1. Какова абсолютная погрешность числа 68.95, если все цифры этого числа верные.

2. Пешеход идет приблизительно со скоростью 6.0 км/час. С какой погрешностью следует измерять время движения пешехода, чтобы погрешность измерения пройденного расстояния не превышала 1.2 м ? Ответ указать в секундах с точностью до 0.01 с.

3. С какой погрешностью следует измерить длину b прямоугольника со сторонами a=4.5 м и b=2.0 м, чтобы погрешность вычисления площади прямоугольника не превысила 0.4 м^2? Ответ записать с точность 0.001 м.

Критерии оценивания

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Для получения зачета с оценкой студент должен выполнить контрольные работы, выполнить лабораторные работы и сдать итоговый тест. Оценка за зачет проставляется по правилу, приведенному в таблице:

Оценка за лабораторные работы	Оценка за тест	Оценка за зачет
отлично	отлично	отлично
отлично	хорошо	отлично
хорошо	отлично	отлично
хорошо	хорошо	хорошо
отлично	удовлетворительно	хорошо
удовлетворительно	отлично	хорошо
хорошо	удовлетворительно	удовлетворительно
удовлетворительно	хорошо	удовлетворительно
удовлетворительно	удовлетворительно	удовлетворительно

неудовлетворительно	-	неудовлетворительно
-	неудовлетворительно	неудовлетворительно

Результаты выполнения студентами итогового теста оценивается по 100 балльной шкале, которые переводятся в пятибалльную шкалу по следующей схеме: 59 баллов и ниже – «неудовлетворительно», 60 баллов – 73 балла – «удовлетворительно», 74 балла – 86 баллов – «хорошо», 87 баллов – 100 баллов – «отлично».

4-й семестр

Экзамен проводится в форме теста. К тесту допускаются студенты, получившие по двум контрольным работам положительные оценки. Тест состоит из 15 вопросов, проверяющих РООПК-2.1, РООПК-2.2. В тесте присутствую как вопросы, проверяющие знание теоретического материала, так и вопросы, проверяющие умение решать задачи.

Перечень теоретических вопросов

1. Метод половинного деления для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным.
2. Метод хорд для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным.
3. Метод простых итераций для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным.
4. Модифицированный метод простых итераций для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным.
5. Метод Ньютона для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным..
6. Метод секущих для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным.
7. Метод Чебышева построения итераций высших порядков для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным.
8. Нахождение корней полиномов.
9. Метод простых итераций для решения системы нелинейных уравнений.
10. Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений.
11. Методы спуска для решения системы нелинейных уравнений.
12. Автоматический выбор шага в методе градиентного спуска для решения системы нелинейных уравнений.
13. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Общие сведения.
14. Разностная схема Эйлера.
15. Методы Рунге-Кутта.
16. Многошаговые методы Адамса.
17. Неявные разностные формулы.
18. Жесткие задачи.
19. Краевые задачи.
20. Конечно-разностные методы решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.
21. Метод стрельбы решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.
22. Сведение линейной краевой задачи к двум задачам Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.
23. Метод линеаризации для нелинейной краевой задачи.

Примеры задач

1. Значение x, делящего отрезок $[a,b]$ по правилу золотого сечения, находится по формуле $x= a+\tau\cdot(b-a)$. Чему равно τ?

2. Дана линейная краевая задача: $\frac{d^2y}{dx^2}+2x^2\frac{dy}{dx}=0,\ y(0)=1,\ y'(1)=0.$ Записать разностный аналог граничного условия при x=1 со вторым порядком аппроксимации.

3. Пусть $y(x_k)=y_h+Ah+o(h^2)$ и $y(x_k)=y_{h/2}+Ah/2+o(h^2)$ два решения дифференциального уравнения, полученные с помощью одной и той же разностной схемы 1-го порядка аппроксимации, но с разными шагами: h и h/2. Оценить погрешность метода решения ОДУ на основе правила Рунге.

Критерии оценивания

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Для получения зачета с оценкой студент должен выполнить контрольные работы, выполнить лабораторные работы и сдать итоговый тест. Оценка за зачет проставляется по правилу, приведенному в таблице:

Оценка за лабораторные работы	Оценка за тест	Оценка за зачет
отлично	отлично	отлично
отлично	хорошо	отлично
хорошо	отлично	отлично
хорошо	хорошо	хорошо
отлично	удовлетворительно	хорошо
удовлетворительно	отлично	хорошо
хорошо	удовлетворительно	удовлетворительно
удовлетворительно	хорошо	удовлетворительно
удовлетворительно	удовлетворительно	удовлетворительно
неудовлетворительно	-	неудовлетворительно
-	неудовлетворительно	неудовлетворительно

Результаты выполнения студентами итогового теста оценивается по 100 балльной шкале, которые переводятся в пятибалльную шкалу по следующей схеме: 59 баллов и ниже – «неудовлетворительно», 60 баллов – 73 балла – «удовлетворительно», 74 балла – 86 баллов – «хорошо», 87 баллов – 100 баллов – «отлично».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

1. Метод Ньютона решения краевой задачи применим:
   a) Только к нелинейным краевым задачам.
   b) Только к линейным краевым задачам.
   c) И к линейным и к нелинейным краевым задачам.
   d) Не применим для решения краевых задач.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа является примером многочлена
   a) Линейной интерполяции.
   b) Глобальной интерполяции.
   c) Локальной интерполяции.

Ключи: 1 a), 2 b).

Задачи

Задача 1 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

С какой погрешностью следует измерить длину b прямоугольника со сторонами a=4.3 м и b=8.5 м, чтобы погрешность вычисления площади прямоугольника не превысила 0.3 м^2? Ответ записать с точность 0.001 м.

Задача 2 (РОБК-1.1, РОБК-1.2)

Вычислить определенный интеграл с погрешностью $\varepsilon=10^{-4}$ методом центральных прямоугольников и методом Симпсона $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

Ответы:

Задача 1. 0.035 м

Задача 2. 0.3037

Теоретические вопросы:

1. В чем заключается обратная задача теории погрешности? (РООПК-2.1, РООПК-2.2).

Ответ должен содержать вывод формулы абсолютной погрешности аргументов по известной абсолютной погрешности функции.

2. Объяснить преимущества неявных разностных формул по сравнению с явными для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ответ должен содержать объяснение на примере сравнения численного решения с точным решением обыкновенного дифференциального уравнения вида $y' = -\lambda y$, $\lambda > 0$ с начальным условием $y(0) = 1$.

Информация о разработчиках

Миньков Леонид Леонидович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета