

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Математический анализ

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольные работы;
- коллоквиумы;
- домашние работы;
- посещаемость;
- рефераты.

В рамках текущего контроля оцениваются: посещаемость, выполнение домашних работ, выполнение контрольных работ, выступление с докладами. Оценивание производится по пятибалльной шкале.

Посещение.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
90%-100% занятий	75% - 89,9% занятий	65% - 74,9% занятий	Менее 65 % занятий

Домашние работы.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
---------	--------	-------------------	---------------------

Опоздание не более 5 дней	Опоздание от 6 до 16 дней	Опоздание от 17 до 30 дней	Опоздание более 30 дней
---------------------------	---------------------------	----------------------------	-------------------------

Контрольные работы.

Каждое задание оценивается по пятибалльной шкале, оценка за контрольную выставляется как среднее арифметическое.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

Коллоквиумы.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Ответ на вопрос выполнен без недочетов..	Ответ на вопрос присутствует, но имеются принципиальные неточности в рассуждениях.	Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки.	Ответ не соответствует вопросу или отсутствует.

Выступление с докладом повышает среднюю арифметическую оценку за семестр на 0,5 балла.

Контрольная работа №1 (первый семестр)

1. Решить:

а) $C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = 7n$; б) $\frac{C_n^4}{A_n^2} \geq (n-2) \frac{P_{n+1}}{P_n}$.

2. Доказать, используя ММИ:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n \cdot (3n - 1) = n^2(n + 1)$;

б) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$.

3. Найти, используя бином Ньютона:

а) разложение $(3x - \frac{y}{3})^6$;

б) коэффициент при x^8 в разложении $(1 + x^2 - x^3)^5$.

4. Решить:

а) $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$; б) $|x - 1| > |x - 3|$.

5. Доказать на кругах Эйлера:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

6. Доказать ограниченность и найти $\inf X, \sup X$:

$$X = \left\{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по темам: «Множества и элементы комбинаторики», «Метод математической индукции», «Определения и свойства множества вещественных чисел».

Контрольная работа №2 (первый семестр)

1. Доказать по определению: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+7}{3n} = \frac{4}{3}$.

2. Вычислить:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n-n^2}{(3n+1)^3 - 27n^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 4^n - 5}{n! + 2}.$$

3. Показать существование предела по ТМОП:

$$x_n = \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}}.$$

4. Доказать сходимость по критерию Коши:

$$x_n = \frac{\sin(1 \cdot 2)}{1 \cdot 2} + \frac{\sin(2 \cdot 3)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin(n \cdot (n+1))}{n(n+1)}.$$

5. Найти $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$, \inf и \sup :

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{4}.$$

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по теме «Предел последовательности».

Контрольная работа №3 (первый семестр)

1. Записать на языке $\varepsilon - \delta$: $f(x) \rightarrow b - 0$ при $x \rightarrow a + 0$.

2. Доказать по определению: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-2)(x^2-4x-5)}{x^2+x-6} = 0$

3. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}}$.

4. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$.

5. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)}$.

6. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$.

7. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$.

8. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(2-x) + \sin(x-2)^2}{x^2 - 4}$.

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по теме «Предел функции».

Контрольная работа №1 (второй семестр)

1. Найти y'_x и y''_{x^2} : $x(t) = \frac{e^t}{1+t}$, $y(t) = (t-1)e^t$.

2. Найти dy и d^2y : $y = u \ln v$, если $u = u(x)$, $v = v(x)$.

3. Найти d^8y : $y = (2x^2 + 1) \operatorname{sh}^2 x$.

4. Вычислить, используя стандартные разложения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \ln(1+x^2)}{x^3 + \sqrt{1+3x^3} - 1}$$

5. Разложить по формуле Маклорена: $y(x) = x \sqrt[3]{4-4x}$.

6. Построить график функции: $r = \cos 3\varphi$.

7. Записать число в тригонометрической форме: $z = (2 - \sqrt{3}i)^{60}$.

8. Найти все корни и записать в показательной форме:

$$z^6 = \sqrt{2} + 2i.$$

9. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$3 < |z - 3 + 4i| \leq 5.$$

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по темам: «Производная явной функции», «Производная сложной функции и функции, заданной параметрически», «Дифференциал», «Производные и дифференциалы высших порядков», «Формула Тейлора», «Исследование функции и построение графиков».

Контрольная работа №2 (второй семестр)

Вычислить интегралы.

1.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

2.

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

3.

$$\int e^{3x} \cos 5x dx$$

4.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6 - 7x^3 + 2x^6}}$$

5.

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 8} dx$$

6.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

7.

$$\int \frac{x - \sqrt{2x^2 + 3x + 5}}{\sqrt{4x^2 + 6x + 10}} dx$$

8.

$$\int \frac{dx}{(2 - \sin x) \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

9.

$$\int \sin x \cos 3x dx$$

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по темам: «Неопределенный интеграл», «Основные приемы интегрирования», «Интегрирование рациональных дробей», «Интегрирование иррациональных выражений», «Интегрирование биномиальных дифференциалов», «Подстановки Эйлера», «Тригонометрические подстановки».

Контрольная работа №3 (второй семестр)

1. Найти площадь плоской фигуры: $y^2 = 2px; x^2 + y^2 = R^2$.

2. Вычислить длину дуги: $x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right); y = a \sin t; 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Найти объем тела вращения вокруг OY : $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2; y = b \left| \frac{x}{a} \right|; a > 0; b > 0$.

4. Найти площадь поверхности вращения кривой вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2} : r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по теме: «Приложение определенных интегралов для вычисления площади плоской фигуры, длины дуги спрямляемой кривой, объема тела, площади поверхности тела вращения».

Контрольная работа №4 (второй семестр)

1. Вычислите по определению:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 15} dx$$

2. Исследуйте на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x \cdot \sqrt[3]{x} + 15} dx$$

3. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{x})^p \cdot \sin(x^5) dx$$

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по темам: «Несобственные интегралы первого и второго рода», «Признаки сходимости для несобственных интегралов от неотрицательных функций», «Признаки сходимости для знакопеременных функций».

Контрольная работа №1 (третий семестр)

1. Исследовать сходимость ряда по определению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} \right)$$

2. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n$$

3. Исследовать сходимость ряда, используя признаки сравнения:

$$a_n = \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$$

4. Исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера или Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} (2n)!}{5^{2n} (n!)^4}$$

5. Исследовать сходимость ряда по признаку Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^2 \frac{1}{n^3}$$

6. Исследовать сходимость ряда по признаку Гаусса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)n^\alpha}, \quad \beta > 0$$

7. Исследовать сходимость по признаку Коши-Маклорена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^n}}$$

8. Доказать расходимость по критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+5}$$

9. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+(-1)^n)^\alpha}$$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{\sqrt{n^2+1}}$$

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по темам: «Числовые ряды», «Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами», «Признаки сходимости числовых рядов со знакопеременными членами», «Критерий Больцано-Коши».

Контрольная работа №2 (третий семестр)

1. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \right]^p \left(\frac{x}{2} \right)^n$.

2. Разложить функцию в ряд по степеням $1-x$: $f(x) = \frac{1}{6-5x+x^2}$.

3. Используя предварительное дифференцирование, разложить функцию в ряд по степеням x :

$$f(x) = x \cdot \arcsin x + x \cdot \operatorname{arctg} x$$

4. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$.

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по темам: «Степенной ряд как частный случай функционального ряда, характеристики степенного ряда», «Разложение функции в ряд Тейлора», «Операции над степенными рядами».

Контрольная работа №3 (третий семестр)

1.

а) Найти производную: $\int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx$.

б) Вычислить, используя дифференцирование или интегрирование по параметру:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx.$$

2. Выразить через эйлеровы интегралы, указав область существования: $\int_0^{+\infty} x^p e^{-\alpha x^2} dx$.

3. Разложить в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ по косинусам нечетных дуг: $f(x) = \frac{x}{2}(x + \pi)$.

При решении контрольной работы нужно знать формулы и использовать лекционный материал (определения, основные теоремы, примеры) по темам: «Несобственные интегралы с параметром», «Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов с параметром», «Эйлеровы интегралы», «Ряды и интегралы Фурье».

Вопросы для проведения в семестре письменного коллоквиума

1 семестр

1. Определение счетного множества и теорема Кантора.
2. Свойства счетных множеств.
3. Теоремы о приближении вещественных чисел рациональными.
4. Теорема о существовании супремума у ограниченного сверху множества.
5. Определение и свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей.
6. Две теоремы о предельном переходе в неравенствах для последовательностей.
7. Теорема о пределе монотонной последовательности.
8. Бином Ньютона и число «е».
9. Лемма о вложенных отрезках.
10. Теоремы о подпоследовательностях и предельных точках последовательности.
11. Лемма Больцано-Вейерштрасса.
12. Признак Больцано-Коши сходимости последовательности.
13. Определение верхнего и нижнего пределов последовательности. Теорема о существовании предела у ограниченной последовательности.
14. Два определения предела функции и их эквивалентность.
15. Теорема о пределе монотонной функции.
16. Признак Больцано-Коши существования предела функции.
17. Определение и свойства непрерывной функции. Классификация точек разрыва. Теорема о разрывах монотонной функции.
18. Первая теорема Больцано-Коши.
19. Вторая теорема Больцано-Коши.
20. Первая теорема Вейерштрасса.
21. Вторая теорема Вейерштрасса.

22. Определение равномерно непрерывной функции. Теорема Кантора.
23. Лемма Бореля.
24. Основные элементарные функции.
25. Первый и второй замечательные пределы.
26. Важные пределы.
27. O-символика.

2 семестр

1. Комплексные числа: формы представления, операции.
2. Комплексные числа: два вывода формулы Эйлера.
3. Свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования. Таблица простейших неопределенных интегралов.
4. Лемма и две теоремы о кратных корнях многочлена.
5. Теоремы о разложении правильной рациональной дроби на простейшие дроби.
6. Интегрирование рациональных дробей.
7. Интегрирование тригонометрических функций.
8. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
9. Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей.
10. Определенный интеграл: определение, вычисление, замена переменной.
11. Критерий существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций.
12. Свойства интегрируемых функций.
13. Свойства определенных интегралов.
14. Первая теорема о среднем. Два свойства интеграла с переменным верхним пределом.
15. Вторая теорема о среднем.
16. Определение и вычисление длины дуги плоской кривой (3 теоремы)
17. Определение объема тела. Вычисление объемов тел с известным поперечным сечением и тел вращения. Вычисление площади поверхности вращения.
18. Два неравенства Йенсена для выпуклых функций.
19. Определение несобственного интеграла I рода. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода от неотрицательных функций.
20. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода от функций произвольного знака.
21. Особые точки функции.
22. Признаки сходимости несобственных интегралов II рода.
23. Главные значения несобственных интегралов. Замена переменных и интегрирование по частям в несобственном интеграле. Интегралы Фруллани.

3 семестр

1. Основные определения и свойства числовых рядов.
2. Критерий Больцано Коши.
3. Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами.
4. Признаки сходимости числовых рядов со знакопеременными членами.
5. Сочетательное свойство сходящихся рядов.
6. Переместительное свойство рядов и теорема Римана.
7. Умножение рядов.
8. Двойные и повторные ряды.
9. Бесконечные произведения.
10. Определение и свойства функционального ряда.
11. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

12. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.
13. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
14. Степенные ряды и радиус их сходимости.
15. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
16. Действия со степенными рядами.

17. Определение и вычисление криволинейных интегралов I и II рода. Связь между криволинейными интегралами I и II рода.
18. Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (плоский случай)
19. Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (трехмерный случай)
20. Интегралы по простым контурам.
21. Равномерная сходимость функций (4 теоремы)
22. Предельный переход под знаком собственного интеграла, зависящего от параметра.
23. Дифференцирование собственного интеграла по параметру.
24. Интегрирование собственного интеграла по параметру. Признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле сходимости несобственных интегралов I рода, зависящих от параметра.
25. Предельный переход и дифференцирование под знаком несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
26. Интегрирование несобственного интеграла I рода по параметру. Интеграл Эйлера-Пуассона.
27. Бета-функция и ее свойства. Вывод формулы, связывающей бета- и гамма-функции.
28. Гамма-функция и ее свойства.
29. Преобразование Лапласа.
30. Свойства преобразования Лапласа.
31. Двойные интегралы.
32. Формула Грина и коэффициент деформации площади.

Примерные темы рефератов.

1. Возникновение теории множеств.
2. Возникновение теории вещественных чисел.
3. История появления и развития понятия ограниченного числового множества, точных верхней и нижней границей.
4. История появления и развития понятия бесконечно малых.
5. Вычисление числа e .
6. Жизнь замечательных математиков.
7. Замечательные кривые: астроида, кардиоида, лемниската Бернулли, Декартов лист, цепная линия и т.д. История появления. Свойства. Применение.
8. Ньютон и Лейбниц – основоположники интегрального исчисления.
9. Формула Валлиса для вычисления числа π .
10. Трансцендентность числа e - формула Эрмита.
11. Приближенное вычисление интегралов.

12. «Одна формула» – математики, прославившиеся одной формулой. Например, формула Бонне.
13. Необычные геометрические задачи.
14. Математические фокусы.
15. Загадки золотого сечения.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Промежуточная аттестация в каждом семестре проводится в виде зачета и экзамена.

Вопросы к экзамену (первый семестр)

1. Мощность множества. Счетные и континуальные множества.
2. Рациональные и вещественные числа.
3. Точные грани числовых множеств
4. Предел последовательности и его свойства.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предельный переход в неравенствах.
6. Предел монотонной последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Бином Ньютона. Число «е» как предел последовательности.
7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.
8. Предел функции и его свойства. Замечательные пределы. Признаки существования предела функции. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций.
9. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва функции. Теоремы о непрерывных функциях.
10. Равномерная непрерывность функции. Обратная функция.
11. Непрерывность элементарных функций.
12. Определение и геометрический смысл производной.
13. Таблица производных.
14. Теоремы о функциях, имеющих производную.
15. Производные высших порядков и их свойства.
16. Дифференциал и дифференцируемость функции.
17. Дифференциалы высших порядков.
18. Дифференциалы сложных функций.
19. Формула Тейлора.
20. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.
21. Исследование функции на монотонность и экстремум.
22. Выпуклость и точки перегиба графика функции.
23. Асимптоты графика функции.

Задачи к экзамену (первый семестр)

1. Доказать по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1.$$

2. Вычислить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3}.$$

3. Показать существование предела по теореме о монотонной и ограниченной последовательности:

$$x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

4. Доказать сходимость по критерию Коши:

$$x_n = \frac{\sin(1 \cdot 2)}{1 \cdot 2} + \frac{\sin(2 \cdot 3)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin(n \cdot (n+1))}{n(n+1)}$$

5. Найти область определения функции:

$$y = \sqrt[8]{\frac{7}{x} - 1} + \ln(x^2 - 4x + 3)$$

6. Доказать по определению и изобразить графически с « $\varepsilon - \delta$ » окрестностями:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6 - 3x) = 3$$

7. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(5x^2 + x - 4)(x - 2)}{x^2 + x}$$

8. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^3 + 5} - \sqrt{4x^3})$$

9. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1 + x)}$$

10. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 + 7}{3x^4} \right)^{4x^4}$$

11. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sin \left(2x^3 + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\ln \left(\sin \left(3x^3 + \frac{\pi}{2} \right) \right)}$$

12. Доказать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$\sqrt[3]{2x + \sqrt{3x + \sqrt{4x}}} = O(\sqrt[3]{x})$$

13. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, установить их характер:

$$y = \frac{6}{1 - 3^{\frac{x}{7-x}}}$$

14. Найти y' производную функции, заданной явно:

$$y = \frac{\ln^6(\sin(5x))}{\sqrt[3]{4 - 7x - x^2}}$$

15. Найти y' производную функции, заданной неявно:

$$e^{\sin y} \cdot (x^4 + y^5) = 7 \cos x$$

16. Найти дифференциал функции:

$$y = \frac{5^{\cos^3 x}}{\operatorname{arccotg}(7x)}$$

17. Найти dy дифференциал функции, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции:

$$y = \sqrt{(u^5 \cdot v^3)}$$

18. Вычислить пределы функций с помощью правила Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x^2-9} \right)$$

19. Найти все корни и записать в показательной форме:

$$z^4 = -3 + \sqrt{3}i.$$

20. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$5 < |4 - z + \sqrt{5}i| < 7.$$

21. Доказать по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

Вопросы к экзамену (второй семестр).

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Таблица интегралов и основные методы интегрирования.

3. Интегрирование рациональных дробей, иррациональных и тригонометрических функций.
4. Интегральная сумма и определенный интеграл.
5. Суммы Дарбу и признак существования определенного интеграла.
6. Свойства интегрируемых функций и определенного интеграла.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Определенный интеграл как функция верхнего предела интегрирования и теоремы о среднем.
9. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление длин дуг плоских кривых, площадей плоских фигур, объемов, площадей поверхностей вращения.
10. Определение и свойства несобственного интеграла 1 рода.
11. Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода. Лемма Бореля.
12. Особые точки функции и определение несобственного интеграла 2 рода.
13. Главные значения несобственных интегралов.
14. Интегралы Фруллани.
15. Основные определения. Предел и непрерывность функции многих переменных.
16. Двойные и повторные пределы.
17. Производные и дифференциал функции многих переменных.
18. Неявные функции одной и многих переменных: существование и дифференцируемость
19. Система неявных функций.
20. Производные и дифференциалы высших порядков.
21. Формула Тейлора.
22. Экстремум функции многих переменных.
23. Метод неопределенных множителей Лагранжа решения задачи на условный экстремум функции многих переменных.

Задачи к экзамену (второй семестр).

1. Вычислить:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^4 - 4}} dx$$

2. Вычислить:

$$\int x^2 \arccos 2x dx$$

3. Вычислить:

$$\int \sin 5x \operatorname{ch} 2x dx$$

4. Вычислить:

$$\int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$$

5. Вычислить:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{(x^2 - 9)(x^2 + 9)} dx$$

6. Вычислить:

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2-3x+x^2}}$$

7. Вычислить:

$$\int (5-2x^2)^{\frac{2}{3}} x^3 dx$$

8. Вычислить:

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x}$$

9. Вычислить:

$$\int \operatorname{ctg} x dx$$

10. Найти площадь плоской фигуры:

$$y = |x-1|; y = 3-|x|$$

11. Найти площадь плоской фигуры:

$$r = 2 + \cos \varphi$$

12. Вычислить длину дуги:

$$x = \sin^3 t; y = \cos^3 t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

13. Вычислите по определению:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 15} dx$$

14. Исследуйте на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x \cdot \sqrt[3]{x} + 15} dx$$

15. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{x})^p \cdot \sin(x^5) dx$$

Вопросы к экзамену (третий семестр).

1. Основные определения.
2. Свойства рядов.
3. Признаки сходимости рядов.
4. Сочетательное свойство сходящихся рядов.
5. Переместительное свойство рядов и теорема Римана.
6. Умножение рядов.
7. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

8. Признаки равномерной сходимости рядов.
9. Свойства равномерно сходящихся рядов.
10. Степенные ряды и радиус их сходимости.
11. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
12. Действия со степенными рядами.
13. Определение и вычисление криволинейных интегралов 1 и 2 рода.
14. Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.
15. Интегралы по простым контурам.
16. Двойные интегралы: определение, свойства, вычисление.
17. Замена переменных в двойном интеграле.
18. Площадь поверхности.
19. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода.
20. Тройные интегралы: определение и вычисление.
21. Интегралы, зависящие от параметра: основные определения.
22. Предельный переход под знаком интеграла, зависящего от параметра.
23. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла, зависящего от параметра.
24. Несобственные интегралы, зависящие от параметра и признаки их сходимости.
25. Эйлеровы интегралы.

Задачи к экзамену (третий семестр).

1. Исследовать сходимость ряда по определению: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.
2. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.
3. Исследовать сходимость ряда, определив порядок убывания a_n : $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$.
4. Исследовать сходимость ряда по одному из признаков Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{n/2}}$.
5. Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+5}{n}$.
6. Доказать расходимость ряда по критерию Больцано-Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

7. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\sqrt{n} + \sin n)}$$

8. Определить область абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left[\frac{1-x}{1+x} \right]^n$$

9. Исследовать характер сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x^n}, \quad x \in [2, +\infty).$$

10. Доказать равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cdot \sin^2 \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2 nx}, \quad x \geq 2.$$

11. Доказать равномерную сходимость по признаку Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3nx \cdot \frac{e^{-nx}}{n}, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Определить область абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left[\frac{1-x}{1+x} \right]^n.$$

13. Разложить функцию в ряд по степеням x , определить радиус и интервал сходимости:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

14. Убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить интеграл:

$$\int_{(1,1)}^{(3,3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

вдоль путей, не проходящих через начало координат.

15. Расставить в различном порядке пределы интегрирования в двойном интеграле по области Ω :

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

Зачет в первом семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала первого семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из пяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

Примеры задач.

1. °Найти y' производную функции, заданной явно:

$$y = \ln^5(\sin(4x)) \cdot \sqrt[3]{4 - 5x - x^2}$$

2. °Найти y' производную функции, заданной неявно:

$$e^y \cdot (x^5 + y^3) = 7x$$

3. °Найти dy дифференциал функции:

$$y = \frac{5 \sin^3 x}{\arccos(7x)}$$

4. °Найти dy дифференциал функции, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции:

$$y = \log_2(u^5 \cdot v^3)$$

5. °Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x-3} \right)$$

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из четырех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК 3.4. Ответ на вопрос четвертой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

Пример теоретической части билета.

1. Вопрос 1. Теорема о существовании супремума.
2. Вопрос 2. Теорема о существовании предела монотонной последовательности.
3. Вопрос 3. Необходимое и достаточное условие экстремума функции.

Пример практической части билета.

1. Задача.

Показать существование предела по теореме о монотонной и ограниченной последовательности:

$$x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

Зачет во втором семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала второго семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из девяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

Примеры задач.

1. Найти и изобразить область определения функции:

$$u = \frac{\sqrt{x^2 - x + y^2 + 2y}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

2. Найти и изобразить линии уровня функции:

$$z = x^2 - 4y^2$$

3. Найти повторные пределы функции, если $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$:

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}$$

4. Найти и классифицировать точки разрыва функции:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 3y^2 - 4}$$

5. °Найти дифференциалы первого и второго порядка для функции:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

6. °Найти дифференциалы первого и второго порядка сложной функции:

$$u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

7. °Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$:

$$F(x + y + z, xyz) = 0$$

8. °Найти экстремум функции:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

9. °Найти условный экстремум функции:

$$z = xy \text{ при условии } 2x + 3y - 5 = 0$$

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из четырех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос четвертой части дается в развернутой форме.

Пятая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК-3.4. Ответ на вопрос пятой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

Пример теоретической части билета.

1. Вопрос 1. Метод неопределенных коэффициентов: разложение дроби с комплексными корнями знаменателя.

2. Вопрос 2. Площадь плоской фигуры: параметрическое задание кривой.

3. Вопрос 3. Признак Абеля для несобственного интеграла 2 рода.

4. °Вопрос 4. Теорема о существовании повторных и двойного пределов.

Пример практической части билета.

1. Задача.

Вычислить длину дуги:

$$x = \sin^3 t; y = \cos^3 t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Зачет в третьем семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала третьего семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из пяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК-3.4.

Примеры задач.

1. °Задача 1.

Вычислить: $\int_C y^2 ds$, если C - арка циклоиды: $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$

2. °Задача 2.

Вычислить: $\int_C (x^2 - y^2) dx + xy dy$, если C - отрезок прямой от $A(1,1)$ до $B(3,4)$.

3. °Задача 3.

Вычислить: $\iint_D \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, если D ограничена линиями: $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}$; $x^2 + y^2 = \pi^2$.

4. °Задача 4.

Расставить пределы интегрирования в различном порядке, если область интегрирования ограничена линиями: $y = 0$, $y = a$, $x + y = 0$, $x + y = 2a$.

5. Задача 5.

Перейдя к полярным координатам, расставить пределы интегрирования в различном порядке, если область интегрирования ограничена линиями: $-2 \leq x \leq 0$, $x^2 \leq y \leq 2 - x$.

Экзамен в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из шести вопросов. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос четвертой части дается в развернутой форме.

Пятая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос пятой части дается в развернутой форме.

Шестая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК-3.4. Ответ на вопрос шестой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

Пример теоретической части билета.

1. Вопрос 1. Переместительное свойство рядов и теорема Римана.
2. Вопрос 2. Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.
3. Вопрос 3. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
4. °Вопрос 4. Замена переменных в двойном интеграле.
5. °Вопрос 5. Определение и свойства бэ́та-функции.

Пример практической части билета.

1. Задача.

Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$.

Промежуточная аттестация в виде зачета оценивается следующим образом.

Выставляется оценка за каждое задание в самостоятельной работе в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

Полученная оценка усредняется с оценками текущего контроля. Тем самым в процессе формирования итоговой оценки учитываются оценки за приобретаемые компетенции.

Оценка «зачтено» выставляется, если итоговый результат оказывается не ниже 2,5. В противном случае выставляется «незачтено».

Промежуточная аттестация в виде экзамена оценивается следующим образом.

Каждый вопрос билета, кроме последнего, оценивается в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Ответ на вопрос выполнен без недочетов..	Ответ на вопрос присутствует, но имеются не принципиальные неточности в рассуждениях.	Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки.	Ответ не соответствует вопросу или отсутствует.

Если в рамках текущего контроля сданы коллоквиумы с оценками не ниже «удовлетворительно», то эти оценки могут быть использованы по желанию обучающегося в качестве оценок за соответствующие вопросы.

Последний вопрос билета оценивается в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

К полученным оценкам добавляется усредненная оценка текущего контроля, тем самым в процессе формирования итоговой оценки учитываются оценки за приобретаемые компетенции. Итоговая оценка является результатом усреднения всех используемых оценок, округленным по правилам округления. Если итог составляет 2,5; 3,5 или 4,5, то округление производится в пользу обучающегося – в большую сторону.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Вариант 1

1. Решить задачу на условный экстремум функции $u = (xyz)^2$ при условии $x^2 + y + z = 5$.

Ответ: $(-1, 2, 2)$ - точка максимума, $u_{\max} = 16$.

Вариант 2

1. Найти площадь общей части фигур, ограниченных кривыми $r = a, r = 2a \cos \varphi$.

Ответ: $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a^2$

Вариант 3.

1. . Выразить через Эйлеровы интегралы и найти область сходимости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx; \quad m, n \in N.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi(2m+1)}{2n}}, 0 \leq m \leq n-1$.

Вариант 4.

1. Вычислить с помощью Эйлеровых интегралов: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$.

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Вариант 5.

1. Доказать счетность множества всех чисел вида: $2^k, k \in N$.

Указание. Установить соответствие между множествами.

Вариант 6.

1. Доказать ограниченность множества: $\{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}, n \in N\}$.

Ответ:

$$\left| \sqrt{n-1} - \sqrt{n+1} \right| = \left| \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}} < 1 = C.$$

Вариант 7.

1. Доказать по определению: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Ответ:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N: \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$
$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right].$$

Вариант 8.

1. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{8} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

Ответ: 3.

Вариант 9.

1. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n^3 + 1} - n\sqrt{n}}$.

Ответ: $+\infty$.

Вариант 10.

1. Доказать сходимость по теореме о пределе монотонной и ограниченной последовательности:

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \dots + \frac{1}{5^n+1}$$

Ответ: а) характер монотонности

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0 \Rightarrow \text{монотонно возрастает}$$

б) ограниченность сверху

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \dots + \frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} + \dots = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}$$
$$= \frac{1}{4} = L \quad \forall n$$

Выполнены все условия теоремы, значит последовательность сходится.

Вариант 11.

1. Считая, что $y = f(x)$ дважды дифференцируемая функция, найти первую и вторую производную функции $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ответ:

$$y' = f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$y'' = \frac{1}{x^4} \cdot f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Вариант 11.

1. Найти первые три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням $(x-1)$.

Ответ: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$.

Вариант 12.

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $z = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6$.

Ответ: $\operatorname{Re} z = -\frac{27}{17}; \operatorname{Im} z = -\frac{11}{17}$.

Вариант 13.

1. Решить уравнение: $z^2 + 2|z| = 1$.

Ответ: $z_1 = i; z_2 = -i; z_3 = -1 + \sqrt{2}; z_4 = 1 - \sqrt{2}$.

Вариант 14.

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C$

Вариант 15.

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{x^2 dx}{1 - x^2}$.

Ответ: $-x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C$

Информация о разработчиках

Гендрина Ирина Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.