

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Арифметико-алгебраическая линия изучения математики в средней школе

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023, 2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А. Крылов

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ОПК-3 Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИОПК 3.1 Популярно и доступно излагает современные научные достижения в сфере математики для аудитории различного уровня

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить особенности формулировок и методы решения арифметических и алгебраических математических задач.

– Изучить методические особенности обучения решению арифметических и алгебраических математических задач.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Второй семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Понятие числа.

Основные числовые системы: натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа. Вполне упорядоченность множества натуральных чисел и принцип математической индукции. Системы счисления: непозиционные системы, традиционные и нетрадиционные позиционные системы (симметричные и нега-позиционные), двоичное кодирование. Задачи на десятичную запись натуральных чисел.

Тема 2. Целая и дробная части числа.

Определение и свойства целой и дробной частей действительного числа. Построение графиков функций и решение уравнений, содержащих целую и/или дробную части.

Тема 3. Делимость чисел.

Определение и свойства делимости целых чисел. Деление с остатком целых чисел. Сравнение целых чисел по заданному модулю. Признаки делимости. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида, соотношение Безу.

Тема 4. Простые числа.

Простые и составные числа. Разложение натуральных чисел на простые множители и его свойства. Количество и сумма натуральных делителей. Взаимно простые числа и свойства делимости и сравнений по модулю для них.

Тема 5. Формулы сокращенного умножения.

Бином Ньютона, треугольник Паскаля, свойства биномиальных коэффициентов. Квадрат полинома. Общая полиномиальная формула. Тригонометрические формулы кратных углов. Разложение на множители суммы и разности одинаковых степеней двух одночленов.

Тема 6. Многочлены.

Многочлены от одной переменной. Равенство многочленов в алгебраическом и функциональном смыслах. Корень многочлена. Деление многочленов с остатком. Делимость многочленов. Схема Горнера. Теорема Безу. Корни многочленов с целыми коэффициентами. Кратные корни. Основная теорема алгебры. Теорема Виета.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки наличия выполненных домашних заданий и выступлений у доски с объяснением домашних заданий. Текущий контроль фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса. Все ответы на теоретические вопросы должны сопровождаться приведением примеров соответствующих задач и рассмотрением методических приемов по обучению решению этих задач. Таким образом, каждый вопрос проверяет ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Продолжительность экзамена 1 час.

Если студент не выполнил в течение семестра домашнее задание по какой-либо из тем, то он получает на зачете дополнительное задание в виде задачи на данную тему. При этом время экзамена увеличивается на 30 минут для каждой дополнительной задачи.

Перечень теоретических вопросов

1. Основные числовые системы. Привести пример перевода бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь. Привести пример иррационального числа (с доказательством).

2. Принцип математической индукции. Доказать методом математической индукции формулу суммы квадратов первых n натуральных чисел, малую теорему Ферма для показателя три и формулу Бине.

3. Позиционные системы счисления. Привести примеры записи чисел и выполнения арифметических действий в различных системах (включая симметричные и негепозиционных системах). Доказать с помощью двоичного кодирования формулу количества подмножеств конечного множества.

4. Целая и дробная части. Построить графики функций $y = [x^2]$, $y = [x]^2$, $y = \{x^2\}$, $y = \{x\}^2$. Привести пример решения уравнения, содержащего целую часть числа.

5. Деление целых чисел с остатком. Свойства остатков (с доказательствами). Привести примеры вычисления остатков для арифметических и алгебраических выражений. Доказать малую теорему Ферма для показателей три и пять.

6. Сравнение целых чисел по заданному модулю. Свойства сравнений (с доказательствами). Привести примеры вычисления остатков с помощью сравнений для арифметических и алгебраических выражений. Доказать малую теорему Ферма для показателя семь.

7. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 (с доказательствами). Привести примеры применения признаков делимости при решении задач. Сформулировать несколько признаков делимости в десятичной системе счисления.

8. НОД и НОК. Свойства НОД. Алгоритм Евклида и соотношение Безу (с доказательством). Применение НОД при сокращении арифметических и алгебраических дробей.

9. Простые и составные числа. Алгоритм проверки числа на простоту (с доказательством). Теоремы Евклида и Вильсона (с доказательством). Решето Эратосфена.

10. Разложение на простые множители. Каноническое разложение и его свойства. Формулы количества и суммы натуральных делителей (с доказательством). Взаимно простые числа, свойства делимости и сравнений по модулю для взаимно простых чисел (с доказательством).

11. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Вывести рекуррентную и явную формулу биномиальных коэффициентов. Привести примеры применения бинома Ньютона при алгебраических и тригонометрических преобразованиях.

12. Полиномиальная формула. Вывести формулы квадрата полинома и куба тринома. Записать общую полиномиальную формулу. Привести примеры применения полиномиальной формулы при алгебраических преобразованиях.

13. Многочлены от одной переменной. Свойства суммы коэффициентов многочлена (с доказательством). Действия над многочленами. Схема Горнера. Привести примеры выполнения действий над многочленами. Корень многочлена. Свойства рационального корня многочлена с целыми коэффициентами (с доказательством).

14. Теорема Безу и её следствия (с доказательством). Привести примеры решения уравнений высших степеней с целыми коэффициентами. Привести пример решения уравнения четвертой степени с целыми коэффициентами, не имеющего рациональных корней (метод неопределенных коэффициентов).

15. Кратные корни (с примерами). Определение кратности с помощью производной. Основная теорема алгебры. Теорема Виета (с доказательством). Привести примеры нахождения выражений, зависящих от корней многочлена, с помощью теоремы Виета.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится за исчерпывающий, точный ответ, демонстрирующий хорошее знание и понимание теоретического материала, свободное владение математическим аппаратом и методическими приемами, умение излагать материал последовательно, делать необходимые обобщения и выводы.

Оценка «хорошо» ставится за ответ, обнаруживающий достаточное знание и понимание теоретического материала, владение методическими приемами, умение излагать материал последовательно и грамотно. В ответе может быть недостаточно полно развернута аргументация, возможны отдельные недостатки в формулировке выводов или в методической обоснованности выбора формы подачи материала.

Оценка «удовлетворительно» ставится за ответ, в котором материал раскрыт, в основном, правильно, но недостаточно полно, с отклонениями от последовательности изложения или методически непродуманно. Математически строгие доказательства подменяются правдоподобными рассуждениями, нет полноценных обобщений и выводов, форма подачи материала не выверена.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если ответ обнаруживает незнание теоретического материала и неумение его анализировать, в ответе отсутствуют необходимые математические примеры; нарушены логика и методическая обоснованность в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «IDo» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=10326>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

Примеры задач для выполнения домашних заданий.

Запишите периодическую дробь $0,(1287)$ в виде несократимой обыкновенной дроби.

Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является иррациональным.

Докажите, что $(5^{n+1} + 4n + 3) : 8$ при всех целых $n \geq -1$.

Вычислите коэффициент при x^2 многочлена $(2x + 1)^8 + x(x - 2)^6$.

Решите уравнение $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x + 1 = 0$.

Вычислите $[\sqrt{7} + \sqrt{11}]$.

Постройте график функции $y = [\sqrt{x}]$. Решите уравнение $[\sqrt{x}] = 2x - 4$.

Запишите числа 82_{10} и -82_{10} в пятеричной, пятеричной симметричной и негапятеричной системах счисления. Вычислите сумму данных чисел в перечисленных системах счисления.

Найдите остаток от деления числа $555^3 \cdot 666^4 + 789^5$ на 7.

Найдите остаток от деления $3^{500} + 4^{500} + 5^{500}$ на 9.

Найдите все возможные остатки от деления четвертой степени целого числа на 8.

Не выполняя деления, проверьте делимость числа 18944596 на 6, 7, 8 и 11.

Найдите наибольшее пятизначное число, которое делится на 2, 3, 4 и 5.

Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 1234 и 3456.

Докажите, что при любом натуральном n числа $16n + 17$ и $24n + 25$ являются взаимно простыми. Чему равно наименьшее общее кратное этих чисел?

Разложите на простые множители число 22344. Найдите количество и сумму натуральных делителей этого числа.

Разложите на простые множители число 9504. Найдите количество и сумму натуральных делителей этого числа.

Решите в целых числах уравнение $n^2 + m^2 + 4n - 2m = 35$.

Решите в натуральных числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

Решите в натуральных числах уравнение $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Решите в натуральных числах уравнение $1 + n + n^2 + n^3 = 2^m$.

Известно, что значения некоторого многочлена с целыми коэффициентами в точках 2 или 3 кратны 6. Докажите, что значения этого многочлена в точке 5 также кратно 6.

Существует ли многочлен десятой степени, принимающий в точках 1, 2, ..., 10 значения 1, 2, ..., 10 соответственно?

Найдите многочлен $P(x)$ такой, что $x \cdot P(x) = (x - 26) \cdot P(x)$.

Докажите, что если все коэффициенты многочлена целые – числа, то при всяком целом значении аргумента значение многочлена есть целое число. Верно ли обратное утверждение?

Найдите свободный член, сумму всех коэффициентов и сумму коэффициентов при нечетных степенях многочлена $(x^2 - 2x + 4)^{1000} + (x^5 - x^3 - 2)^{2000}$.

При каких значениях параметров корни многочлена $2x^5 - 3x^4 + ax^3 - bx^2 + 6x + 2$ равны двум и трем?

Найдите частное и остаток при делении многочлена $x^n - 2$ на двучлен $x - 1$.

При делении $f(x)$ на $g(x)$ остаток равен 3, а при делении $f^2(x)$ на $g^2(x)$ остаток равен 9. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $g^2(x)$.

Докажите, что число -1 является корнем многочлена $x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ и найдите его кратность.

При каком значении параметра сумма двух корней уравнения $4x^3 + 8x^2 - 29x + a = 0$ равна двум? Решите полученное уравнение.

Многочлен $f(x)$ при делении на $x - 7$ дает остаток 12, а при делении на $x + 1$ – остаток 9. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $x^2 - 6x - 7$.

Докажите, что число $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ является целым.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

1. Рациональные и иррациональные числа.
2. Метод математической индукции. Тождества.
3. Метод математической индукции. Делимости и рекуррентные формулы.
4. Традиционные позиционные системы счисления.
5. Симметричные и нега-позиционные системы счисления.
6. Двоичное кодирование.
7. Целая часть числа.
8. Дробная часть числа.
9. Функции и уравнения, содержащие целую или дробную части.
10. Делимость целых чисел.
11. Свойства остатков.
12. Сравнения целых чисел по модулю.
13. Периодичность остатков при возведении в степень.
14. Признаки делимости на 2, 4, 5, 8, 10.
15. Признаки делимости на 3, 6, 7, 9, 11, 13.
16. НОД и НОК.
17. Алгоритм Евклида, соотношение Безу.
18. Простые и составные числа.
19. Разложение на простые множители.
20. Взаимно простые числа.
21. Диофантовы уравнения.
22. Бином Ньютона.
23. Формулы кратных углов.
24. Полиномиальная формула.
25. Многочлены, равенство многочленов, сумма коэффициентов.
26. Действия над многочленами, корень многочлена.
27. Корни многочленов с целыми коэффициентами.
28. Метод неопределенных коэффициентов для многочленов четвертой степени.
29. Деление многочленов с остатком. Схема Горнера.
30. Теорема Безу и её следствия.

31. Кратные корни.

32. Теорема Виета.

г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Успешное освоение курса невозможно без напряженной самостоятельной работы студента. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научно-методической литературе);
- решение задач, предложенных в качестве домашнего задания;
- подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения.

При выполнении домашних заданий рекомендуется сначала повторить соответствующий теоретический материал, просмотреть типовые опорные задачи, рассмотренные на лекциях, и примеры, решенные на практических занятиях.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

- Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 432 с.
- Бухштаб А.А. Теория чисел. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 384 с.

б) дополнительная литература:

- Виноградов И.М. Основы теории чисел. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 176 с.
- Кострикин А.И. Основы алгебры. – М.: МЦНМО, 2022. – 272 с.
- Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач. – М.: МЦНМО, 2022. – 336 с.
- Сгибнев А.И. Делимость и простые числа. – М.: МЦНМО, 2019. – 120 с.
- Кноп К.А. Азы теории чисел. – М.: МЦНМО, 2022. – 80 с.
- Гашков С.Б., Кравцев С.В. Многочлены: уравнения и неравенства. – Калуга: АКФ Политоп, 2021. – 446 с.
- Прасолов В.В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.
- Гриншпон И.Э., Гриншпон С.Я. Многочлены над областями целостности (теория и приложения). – Томск: издательский дом ТГУ, 2016. – 152 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- Малый мехмат МГУ. <http://mmmf.msu.ru/>
- Интернет-проект «Задачи». <http://www.problems.ru>
- Сайт подготовки к олимпиадам, ДВИ и ЕГЭ по математике <https://mathus.ru/math/>
- Электронная библиотека «Математическое образование» <https://www.mathedu.ru/>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Гриншпон Яков Самуилович, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный университет, доцент кафедры общей математики