

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:  
Декан ММФ ТГУ  
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине  
**Метод внешних форм Картана**

по направлению подготовки

**01.03.01 Математика**  
**02.03.01 Математика и компьютерные науки**

Направленность (профиль) подготовки  
**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики**  
**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики**  
**и компьютерных наук**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2023**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
Л.В.Гензе

Председатель УМК  
Е.А.Тарасов

## 1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-4 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.

ПК-1 Способен проводить научно-исследовательские разработки по отдельным разделам выбранной темы.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 4.1 Проводит поиск и обработку научной и научно-технической информации, необходимой для решения исследовательских задач

ИОПК 4.2 Оценивает полученные результаты и формулирует выводы по итогам проведенных исследований

ИПК 1.1 Проводит работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований

ИПК 1.2 Подготавливает планы и программы проведения отдельных этапов научно-исследовательской работы

ИПК 1.3 Проводит отдельные этапы научно-исследовательской работы

## 2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- упражнения;
- контрольная работа;

### Упражнения (ИОПК-4.2.) (примеры)

1. Проверить на линейную зависимость систему форм  $\omega^1 = 2e^1 - 3e^2$ ,  $\omega^2 = e^1 + 4e^3$ ,  $\omega^3 = e^2 - e^3$  при условии  $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \neq 0$ .
2. При каких значениях константы  $x$  система 1-форм  $\omega^1 = 2e^1 + xe^2 - e^3$ ,  $\omega^2 = 3e^2 + xe^3$ ,  $\omega^3 = xe^1 + 2e^2$  линейно зависима, если  $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \neq 0$ ?:
3. Дана внешняя 2-форма  $Q = e^1 \wedge e^4 - 2e^1 \wedge e^3 + 3e^2 \wedge e^5 - 6e^2 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5$ . Найти матрицу, базис и ранг ассоциированной системы.
4. Составить замыкание системы 
$$\begin{cases} dz_1 = z_2 dx_1 + z_1 dx_2, \\ dz_2 = z_2 dx_1 + z_2 dx_2, \\ dz_3 = z_3 dx_1 + z_2 dx_2. \end{cases}$$

### Ответы:

1. Линейно независима.
2.  $x \in \{-1, 0, 1\}$
3. Один из базисов (базис, разумеется, определяется неоднозначно)  $\{e^4 - 2e^3, 2e^5 - 3e^4, e^1, -e^1 + 6e^2\}$ . Соответствующая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ и ранг равен } 4.$$

$$4. \text{ Ответ. } \begin{cases} dz_2 \wedge dx_1 + dz_1 \wedge dx_2 = 0, \\ dz_2 \wedge dx_1 + dz_2 \wedge dx_2 = 0, \\ dz_3 \wedge dx_1 + dz_2 \wedge dx_2 = 0. \end{cases}$$

Критерии оценивания: упражнение выполнено успешно, если приведено полное решение с верным ответом.

Контрольная работа (ИПК-1.3)

Контрольная работа состоит из 2 теоретических вопросов и 2 задач.

**Примеры теоретических вопросов:**

1. Алгебраической производной от внешней формы  $\Omega_p$  степени  $p$ .
2. Лемма Картана.
3. Вполне интегрируемая система Пфаффа.

**Примеры задач:**

Задача 1

$$\text{Является ли система } \begin{cases} dz_1 = z_2 dx_1 + z_1 dx_2, \\ dz_2 = z_2 dx_1 + z_2 dx_2, \\ dz_3 = z_3 dx_1 + z_2 dx_2. \end{cases} \text{ вполне интегрируемой?}$$

Задача 2

Найти характеристическую систему для системы уравнений Пфаффа

$$\begin{cases} dz_1 = x_1 dx_2 + x_2 dx_3 \\ dz_2 = x_2 dx_3 + x_3 dx_4 \end{cases}$$

**Ответы:**

Задача 1. Да.

Задача 2.  $dx_2 = 0, dx_3 = 0, dx_1 - dx_3 = 0, dx_2 - dx_4 = 0$ .

**Критерии оценивания:**

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все теоретические вопросы и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если допущена одна неточность в ответе на теоретический вопрос либо одна погрешность (поправимая) в решении задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется при наличии двух существенных ошибок при ответе на четыре пункта контрольной работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется при наличии двух или более существенных ошибок при ответе на четыре пункта контрольной работы.

### **3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

Промежуточная аттестация проводится в виде зачёта.

Зачётное задание состоит из двух частей.

Первая часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИОПК 4.1 и ИОПК-4.2. Ответы на вопросы первой части даются в развёрнутой форме

Вторая часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИПК-1.3 и оформленные в виде практических задач. Ответы на вопросы второй части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

**Перечень теоретических вопросов:**

1. Моном в грассмановой алгебре.
2. Внешняя форма.
3. Базис системы внешних форм.
4. Лемма Картана.
5. Числовое значение внешней формы.
6. Алгебраическая производная внешней формы.
7. Ассоциированная система форм для данной внешней формы.
8. Теорема о базисе ассоциированной системы.
9. Форма Пфаффа.
10. Теорема о системе форм Пфаффа, обращение которых в нуль – алгебраическое следствие обращения в нуль линейно независимых форм Пфаффа.
11. Теорема о внешней квадратичной форме, обращение которых в нуль – алгебраическое следствие обращения в нуль линейно независимых форм Пфаффа.
12. Внешнее дифференцирование р-форм. Свойства.
13. Билинейный ковариант Фробениуса.
14. Интегральное многообразие системы уравнений Пфаффа.
15. Теорема об одномерных интегральных многообразиях.
16. Замыкание пфаффовой системы.
17. Чистое замыкание пфаффовой системы.
18. Первый интеграл пфаффовой системы.
19. Теорема Фробениуса.
20. Характеристическая система для системы уравнений Пфаффа.
21. Характеры системы уравнений Пфаффа.
22. Число Картана системы уравнений Пфаффа.
23. Продолжение пфаффовой системы.
24. Второе продолжение пфаффовой системы.
25. Частичное продолжение пфаффовой системы.
26. Система уравнений Пфаффа в инволюции.
27. Критерий Картана.

**Примеры задач:**

1. Дана внешняя форма 3-й степени  
 $\Omega_3 = 3e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 \wedge e^6 + e^1 \wedge e^3 \wedge e^5 - 2e^3 \wedge e^5 \wedge e^6$  Вычислить несколько алгебраических производных.
2. Найти ранг внешней квадратичной формы  
 $\Omega_2 = e^1 \wedge e^3 - 2e^1 \wedge e^4 + 3e^1 \wedge e^5 - 3e^2 \wedge e^3 + 6e^2 \wedge e^4 - 9e^2 \wedge e^5$  и, перейдя к соответствующему базису, выразить форму через наименьшее количество векторов.
3. Найти чистое замыкание системы  $\begin{cases} dz_1 = xdu - ydv + 2z_1dx, \\ dz_2 = ydu + xdv - 2z_2dy. \end{cases}$
4. Доказать, что система уравнений Пфаффа  $\begin{cases} dz = udx + zdy, \\ du = u(dx + dy), \\ dv = vdx + udy \end{cases}$ ,  $dx \wedge dy \neq 0$ . вполне интегрируема и найти ее общее решение.

5. Исследовать систему  $\begin{cases} dz = (u + y)dx - xdv, \\ dt = (v + x)dy - ydu \end{cases}$  при условии  $dx \wedge dy \neq 0$ .
6. Найти характеры системы уравнений  $\begin{cases} dz_1 = xdu + ydv, \\ dz_2 = ydv + zdw, \\ dz_3 = zdw + xdu, \end{cases}$   $dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$  и определить числа  $q, Q$ .
7. Найти число  $N$  системы из предыдущей задачи.
8. Найти общее решение системы  $\begin{cases} du_1 = z_1 dx + \frac{1}{2} x^2 dy, \\ du_2 = \frac{1}{2} y^2 dx + z_2 dy, \\ du_3 = z_2 dx + z_1 dy \end{cases}$   $dx \wedge dy \neq 0$ .
9. Исследовать систему уравнений  $\begin{cases} dz_1 = udx + vdy, \\ dz_2 = wdx + xdy, \\ dz_3 = ydx + wdy, \end{cases}$   $dx \wedge dy \neq 0$ .
10. Исследовать систему уравнений  $\begin{cases} dz_1 = udx + x^2 dy, \\ dz_2 = udy + y^2 dx \end{cases}$   $dx \wedge dy \neq 0$ .
11. Исследовать систему уравнений  $dz_1 = xdv + udy, dz_2 = udv + ydv, dz_3 = vdy$ ,  $dx \wedge dy \neq 0$ .
12. Исследовать систему уравнений  $\begin{cases} dt_1 = udx + vdy - zdv, \\ dt_2 = udz - ydu + vdx \end{cases}$   $dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$ .
- Исследовать систему уравнений  $\begin{cases} dt_1 = udx - 2vdy, \\ dt_2 = vdy + wdz, \\ dt_3 = 2wdz + udx. \end{cases}$

**Критерии оценивания:**

Результаты зачёта определяются оценками «зачтено», «незачтено», Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные развёрнутые ответы на теоретические вопросы и все предложенные задачи решены без существенных ошибок.

Оценка «незачтено» выставляется, если ответы на теоретические вопросы неточны, а решения задач содержат принципиальные ошибки.

**4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

**Тест**

1. Какие преимущественные области применения метода внешних форм Картана (ИОПК-4.2.)?
  - а) Линейная алгебра.
  - б) Вариационное исчисление.
  - в) Теория совместности ДУЧП.
  - г) Аналитическая геометрия.
  - д) Дифференциальная геометрия.
2. Математические теории, лежащие в основе метода внешних форм Картана (ИПК 1.3):
  - а) Линейная алгебра.

- б) Аналитическая геометрия.
- в) Математический анализ.
- г) ДУЧП.
- д) Функциональный анализ.

Ключи: 1 (в+д), 2 (а+б+в+г).

### **Задачи**

#### **Задача 1 (ИПК-1.3)**

Дана внешняя форма 3-й степени

$$\Omega_3 = 3e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 \wedge e^6 + e^1 \wedge e^3 \wedge e^5 - 2e^3 \wedge e^5 \wedge e^6$$

Вычислить алгебраические производные по  $e^1$  и  $e^5$ .

#### **Задача 2 (ИПК-1.3)**

Найти ранг внешней квадратичной формы

$$\Omega_2 = e^1 \wedge e^3 - 2e^1 \wedge e^4 + 3e^1 \wedge e^5 - 3e^2 \wedge e^3 + 6e^2 \wedge e^4 - 9e^2 \wedge e^5$$

Ответы:

Задача 1.  $\frac{\partial \Omega_3}{\partial e^1} = 3e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5, \frac{\partial \Omega_3}{\partial e^5} = e^2 \wedge e^6 + e^1 \wedge e^3 + 2e^3 \wedge e^6.$

Задача 2. 2.

### **Теоретические вопросы:**

1. Грассманова алгебра. (ИПК-1.3). Ответ должен содержать определение знакопеременного (внешнего) произведения, сведения о свойствах этой операции.
2. Лемма Картана. (ИПК-1.3). Ответ должен содержать формулировку леммы и (по крайней мере) схему доказательства.
3. Внешнее дифференцирование р-форм. Свойства. (ИПК-1.3). Ответ должен содержать определение данной операции и сведения о свойствах.  
Замыкание пфафовой системы.  
Чистое замыкание пфафовой системы.
4. Продолжение пфафовой системы. (ИПК-1.3). Ответ должен содержать определение данной операции и сведения о цели её применения.
5. Система уравнений Пфаффа в инволюции. (ИПК-1.3). Ответ должен содержать определение инволютивной системы и признак инволютивности.

### **Информация о разработчиках**

Бухтяк Михаил Степанович, к.ф.-м.н., доцент кафедры геометрии.