Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

по направлению подготовки

09.03.02 Информационные системы и технологии

Направленность (профиль) подготовки:
«Цифровая физика: анализ данных физики высоких энергий и моделирование сложных систем»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
И.А. Конов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-1 – Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

– ИОПК-1.1. Обладает необходимыми естественнонаучными и общеинженерными знаниями для исследования информационных систем и их компонент;

– ИОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических, естественных и общеинженерных наук в профессиональной деятельности;

– ИОПК-1.3. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических, естественных и общеинженерных наук для моделирования и анализа задач.

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить понятийный аппарат математического анализа и основные методы доказательств и решения задач.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы математического анализа для решения практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестры освоения и формы промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 1, экзамен.
Семестр 2, экзамен.
Семестр 3, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования (средняя общеобразовательная школа).

Для успешного освоения дисциплины в 1 семестре не требуются результаты обучения по другим дисциплинам.

Для успешного освоения дисциплины во 2, 3 семестре требуются положительные результаты обучения по следующим дисциплинам: линейная алгебра и аналитическая геометрия.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 13 з.е., 468 часов, из которых:

– лекции: 160 ч.;
– семинарские занятия: 0 ч.
– практические занятия: 160 ч.;
– лабораторные работы: 0 ч.

в том числе практическая подготовка: 0 ч.
Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Множества, отображения, функции. Множества и операции над ними, кванторы. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Бином Ньютона. Определение поля вещественных чисел. Полнота (непрерывность) поля вещественных чисел. Границы числовых множеств. Теорема Больцано-Вейерштрасса о супремуме и инфимуме. Определение отображения (функции). Понятия образа и прообраза множества. Виды отображений (иъекция, сюръекция, биекция). Композиция отображений. Обратное отображение. Основные элементарные функции и их свойства.
Тема 2. Теория последовательностей. Понятие метрического пространства. Окрестность; внутренние, граничные, предельные точки; замкнутое, открытое, ограниченное множество в метрическом пространстве. Конечномерное евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Понятие последовательности в метрическом пространстве. Предел последовательности. Лемма о вложенных промежутках, брусах в евклидовом пространстве. Теорема Больцано о предельной точке. Теорема Больцано-Вейерштрасса о подпоследовательности. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Теорема о покоординатной сходимости. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства. Теоремы о пределах, связанные с равенствами и неравенствами. Первый замечательный предел. Существование предела монотонной и ограниченной последовательности. Второй замечательный предел.
Тема 3. Предел и непрерывность функции. Предел функции по Гейне и по Коши. Единственность предела. Предел композиции. Замена переменной под знаком предела. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их классификация и свойства. Теоремы о пределах, связанные с равенствами и неравенствами. Необходимое и достаточное условие существования конечного предела функции произвольного аргумента. Критерий существования предела функции через односторонние пределы. Существование предела монотонной и ограниченной функции. Первый и второй замечательные пределы и следствия из них. Свойства пределов для отображений конечномерного евклидова пространства и метрических пространств.Определение непрерывности функций в точке и на множестве. Непрерывность монотонной функции, сложной функции. Точки разрыва. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Теоремы Коши и Вейерштрасса для непрерывных функций на замкнутом и ограниченном множестве. Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
Тема 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его применение. Дифференцируемость. Дифференциал. Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Геометрический смысл дифференциала. Связь между дифференцируемостью и существованием производной. Дифференцируемость и непрерывность. Производная обратной функции. Правила вычислений производных. Таблица основных производных. Физический смысл производной. Инвариантность формы первого дифференциала. Параметрические уравнения кривой. Вычисление производных функций заданных параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (Лагранжа, Коши). Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши о дифференцируемых функциях. Условие монотонности функции. Достаточные условия экстремума функции (с помощью производной 1-го и высших порядков). Направление вогнутости кривой. Достаточное условие выпуклости (вогнутости). Точки перегиба. Достаточные условия перегиба для 2 и n- раз дифференцируемой функции. Асимптоты. Общая схема исследования функций и построения графиков (декартова и полярная системы координат, параметрически заданные кривые).

Тема 5. Неопределенный интеграл. Некоторые сведения о комплексных числах и их использовании для разложения многочленов с вещественными коэффициентами на множители. Разложение дробно-рациональных выражений на сумму простых дробей. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Геометрическое истолкование первообразной. Таблица основных интегралов. Интегрирование путем замены переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых иррациональностей. Интегрирование дифференциальных биномов (подстановки Чебышева). Подстановки Эйлера. Интегрирование тригонометрических функций. Понятие о функциях не имеющих элементарных первообразных. Эллиптические интегралы.

Тема 6. Определенный интеграл Римана на отрезке и его приложения. Несобственные интегралы. Интегральные суммы Римана для функций, заданных на отрезке, и их предел. Суммы Дарбу и их свойства. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла. Класс функций интегрируемых по Риману. Свойства определённого интеграла. Теоремы о среднем значении интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Свойства интеграла с переменным верхним пределом, формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Понятие площади (на классе многоугольных фигур, для произвольной ограниченной замкнутой области). Необходимое и достаточное условие существования площади произвольной ограниченной замкнутой области. Классы кривых, имеющих нулевую площадь. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенных интегралов. Определение гладкой кривой линии. Определение длины гладкой кривой линии, вычисление ее длины с помощью определенного интеграла. Длина кривой в полярной системе координат. Вычисление объёмов тел вращения. Статистические моменты и координаты центра тяжести конечной системы материальных точек, материальной пластинки, гладкой кривой. Две теоремы Паппа-Гульдина. Определение несобственных интегралов 1 и 2 рода. Признаки сходимости. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственных интегралах.

Тема 7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Повторные пределы. Теорема о повторных пределах. Понятие дифференцируемости, дифференциала, геометрический смысл частных производных. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Производная по данному направлению, градиент. Уравнение касательной плоскости и нормали к графику функции двух переменных. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о смешанных производных. Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Понятие неявной функции. Теоремы существования, непрерывности, дифференцируемости неявных функций, определяемых одним уравнением и системой уравнений. Необходимое условие локального экстремума. Достаточные условия локального экстремума. Второй дифференциал как квадратичная форма. Критерий Сильвестра положительной и отрицательной определённости квадратичной формы. Условный экстремум. Методы нахождения условного экстремума. Функция Лагранжа.

Тема 8. Числовые и функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда, необходимое и достаточное условие равномерной сходимости ряда. Признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов. Простейшие свойства функциональных рядов: непрерывность суммы ряда, почленное интегрирование и почленное дифференцирование функционального ряда. Понятие степенного ряда. Простейшие свойства степенных рядов: равномерная сходимость степенного ряда внутри промежутка сходимости, непрерывность суммы степенного ряда, почленное интегрирование степенного ряда. Степенной ряд, как ряд Тейлора. Разложения в степенные ряды некоторых элементарных функций. Простейшие применения степенных рядов: нахождение значений функций, вычисление интегралов, решение уравнений. Формулы для радиуса сходимости.

Тема 9. Криволинейные интегралы и их применение. Криволинейный интеграл первого рода, определение, вычисление, применение к подсчету масс материальных кривых, сил притяжения материальных кривых и точек. Криволинейный интеграл второго рода, определение, вычисление, связь с интегралом первого рода, приложение к вычислению работы силового поля.

Тема 10. Двойные интегралы и их применение. Определение, условие существования, простейшие свойства двойных интегралов. Вычисление двойных интегралов в случае прямоугольной области и в случае произвольной области. Приложение двойных интегралов: объем цилиндрического бруса, площадь плоской фигуры, масса материальной пластинки. Формула Грина. Приложения формулы Грина, выражение площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла, условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, потенциальные силовые поля. Замена переменных в двойном интеграле: отображение плоских областей, криволинейные координаты, выражение площади в криволинейных координатах, замена переменных в двойном интеграле.

Тема 11. Тройные интегралы и их применение. Определение тройного интеграла. Свойства тройных интегралов. Вычисление тройных интегралов. Формула Гаусса-Остроградского, приложения формулы к вычислению поверхностных интегралов, объемов тел. Поток. Дивергенция. Криволинейные координаты в пространстве. Выражение объема в криволинейных координатах. Замена переменных в тройном интеграле. Простейшие применения тройных интегралов: вычисление объемов тел, нахождение массы тела по данной плотности, центр тяжести материального тела, притяжение материальной точки материальным телом.

Тема 12. Поверхностные интегралы и их применение. Площадь поверхности. Сторона поверхности. Ориентация поверхности и выбор ее стороны. Определение поверхностного интеграла первого рода. Вычисление поверхностного интеграла первого рода. Приложения поверхностных интегралов первого рода: масса материальной поверхности, центр тяжести материальной поверхности, сила притяжения материальной точки материальной поверхностью. Поверхностные интегралы второго рода. Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Приложение поверхностных интегралов к вычислению потоков векторных полей. Формула Стокса. Векторная запись формулы Стокса. Циркуляция. Ротор.

Тема 13. Введение в ряды Фурье. Ортонормированные системы функций, понятие тригонометрического ряда, понятия ряда Фурье. Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье (интеграл Дирихле), лемма Римана, принцип локализации. Признак поточечной сходимости ряда Фурье. Случай непериодической функции. Разложение по косинусам и по синусам. Комплексная форма ряда Фурье.

Тема 14. Интегралы, зависящие от параметра Определение и критерий равномерного по параметру стремления к предельной функции. Предельный переход под знаком интеграла. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра. Дифференцируемость и интегрируемость интеграла, зависящего от параметра. Формула Лейбница. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Определение и критерий равномерной сходимости несобственного интеграла на бесконечном промежутке. Признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром. Предельный переход и непрерывность несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрируемость и дифференцируемость под знаком интеграла. Теорема о перестановке порядка интегрирования в несобственном интеграле. Эйлеровы интегралы. Свойства Бета-функций и Гамма-функций и связь между ними.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем проведения контрольных работ, индивидуальных работ, коллоквиумов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в первом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и две задачи. Продолжительность экзамена для одного студента – два часа.

Примерный перечень теоретических вопросов на экзамен в 1 семестре: (Проверяется ИОПК 1.1 – в разделе «Предел, непрерывность, дифференцируемость функций одной переменной»)

1. Множества. Определить операции объединения, пересечения, разности, декартового произведения множеств. Доказать одну из формул де Моргана.
2. Определить, что означает «задано отображение из множества X во множество Y». Что называется образом множества, прообразом множества, множеством значений при данном отображении? Привести пример.
3. Дать определение инъекции, сюръекции, биекции, обратного отображения к данному. Задать биекцию и обратное отображение по формуле $f(x) = \operatorname{tg} x$.
4. Объяснить, как задается композиция двух отображений. Привести два примера: а) композиция двух функций определена, в) композиция двух функций не определена.
5. Определить множества натуральных, целых, рациональных чисел.
6. Дать определения бесконечного и счетного множеств. Привести примеры счетных множеств. Доказать, что множество рациональных чисел счетно.
7. Определить, из каких элементов состоит множество вещественных чисел. Определить операции сравнения, сложения, умножения на множестве вещественных чисел.
8. Дать определения несчетного множества. Доказать, что множество вещественных чисел не счетно.
9. Сформулировать леммы о приближении вещественного числа рациональным, о плотности рациональных чисел в вещественных числах, об условии равенства вещественных чисел через рациональные. Доказать одну из лемм.
10. Дать определение точной верхней и точной нижней грани числового множества. Сформулировать и доказать теорему о существовании точных граней.
11. Сформулировать теорему о существовании корня из вещественного числа. Записать этапы доказательства этой теоремы.
12. Дать определение вещественной степени положительного вещественного числа. Сформулировать свойства операции возведения в степень.
13. Дать определение метрического пространства. В качестве примера рассмотреть пространство $\mathbf{R}^m$ при различных m.
14. Дать определение предела последовательности в метрическом пространстве. Доказать ограниченность сходящейся последовательности и единственность предела. Записать эти результаты для числовой последовательности.
15. Сформулировать и доказать критерий сходимости последовательности в метрическом пространстве, использующий подпоследовательности. Или доказать этот результат для числовых последовательностей.

16. Дать определение бесконечно малой и бесконечно большой числовой последовательности. Доказать теорему о связи между ними и теорему о свойствах бесконечно малых.

17. Доказать теорему об арифметических свойствах предела числовой последовательности. Сформулировать аналогичную теорему для предела функции.

18. Доказать теоремы о переходе к пределу в неравенстве для числовых последовательностей и о трех последовательностях. Сформулировать аналогичные теоремы для числовых функций.

19. Доказать теорему Вейерштрасса о монотонных последовательностях,

20. Определить число e как предел числовой последовательности. Доказать, что этот предел существует. Рассмотреть подпоследовательности.

21. Доказать лемму Кантора о вложенных отрезках. Указать те теоремы, в доказательстве которых применяется эта лемма.

22. Доказать теорему Больцано – Вейерштрасса об ограниченной последовательности.

23. Дать определение верхнего и нижнего предела числовой последовательности. Доказать критерий сходимости последовательности, использующий эти понятия.

24. Дать определение фундаментальной последовательности. Сформулировать и доказать критерий Коши сходимости числовой последовательности.

25. Дать определение предельной точки множества. Сформулировать и доказать критерий того, что точка является предельной для множества.

26. Дать определение открытого и замкнутого множества в метрическом пространстве. Сформулировать и доказать критерий открытого множества (через понятие замкнутого множества).

27. Дать определение предела отображения в смысле Коши и в смысле Гейне. Доказать эквивалентность этих определений.

28. Сформулировать и доказать критерий Коши существования предела отображения.

29. Доказать теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранение знака для функции, имеющей предел в точке.

30. Дать определение одностороннего предела функции в точке (конечного, бесконечного). Дать определения предела функции при стремлении переменной к бесконечности, $+\infty, -\infty$. Построить таблицу всех возможных определений предела числовой функции.

31. Первый замечательный предел функции: формулировка, доказательство, следствия из него.

32. Второй замечательный предел функции: формулировка, доказательство, следствия из него.

33. Дать определение непрерывного в точке отображения. Доказать теоремы о замене переменного под знаком предела и о непрерывности композиции непрерывных функций.

34. Доказать теоремы о пределе монотонной функции и о непрерывности монотонной функции на отрезке.

35. Доказать непрерывность степенных функций.

36. Доказать непрерывность показательной функций.

37. Доказать непрерывность тригонометрических функций.

38. Дать определения эквивалентных функций в точке, функции, бесконечно малой по сравнению с данной в точке. Доказать теоремы о связи этих понятий, а так же о применение эквивалентностей для нахождения пределов функций.

39. Дать определение точки разрыва числовой функции. Рассказать о классификации точек разрыва. Привести примеры.

40. Доказать теорему Вейерштрасса о достижении точных граней непрерывной функцией на отрезке.

41. Доказать теорему Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке.

42. Доказать теорему о существование обратной функции для непрерывной монотонной функции на отрезке

43. Доказать непрерывность логарифмической функции.

44. Дать определение равномерно непрерывной функции на множестве. Доказать теорему Гейне – Кантора о равномерной непрерывности.

45. Дать определения компактного множества в метрическом пространстве. Привести примеры компактных и некомпактных множеств. Сформулировать критерий компактности в $\mathbf{R}^m$.

46. Доказать теорему Гейне – Кантора о равномерной непрерывности на компактах.

47. Дать определение линейно связного множества в $\mathbf{R}^m$. Доказать теорему Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на линейно связном множестве.

51. Дать определение производной и первого дифференциала функции в точке, доказать теорему о связи между ними и теорему о непрерывности дифференцируемой функции.

52. Получить уравнение касательной к дифференцируемой функции в точке из геометрических соображений. Показать связь между касательной и первым дифференциалом.

53. Сформулировать теорему о производной при арифметических действиях. Доказать формулу для дифференцирования произведения и частного двух функций.

54. Сформулировать и доказать теорему о производной композиции, а также инвариантность формы первого дифференциала.

55. Сформулировать и доказать теорему о производной обратной функции. Привести пример ее применения.

56. Записать таблицу производных основных элементарных функций. Получить несколько из записанных формул (на выбор преподавателя).

57. Дать определение производной порядка n. Доказать формулу Лейбница для производной n -го порядка от произведения двух функций.

58. Дать определение второго, третьего и т.д. дифференциалов функции в точке. Показать, что второй дифференциал не инвариантен при замене независимой переменной на функцию.

59. Вывести формулы для дифференцирования функции, заданной параметрически. Показать, как считается вторая, третья производная функции в этом случае. Привести пример.

60. Сформулировать и доказать теоремы Ферма и Ролля. Привести теоремы, в которых используются эти результаты.

61. Доказать формулы конечных приращений Коши и Лагранжа. Привести примеры их применения.

62. Сформулировать правило Лопиталя нахождения пределов функций в случае $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Доказать один из случаев.

63. Дать определение многочлена Тейлора степени n для функции в точке, доказать его основные свойства.

64. Доказать теорему о структуре остаточного члена в формуле Тейлора. Получить форму Лагранжа, форму Коши.

65. Сформулировать необходимое и два достаточных условия локального экстремума функции. Доказать достаточные условия.

66. Дать определение выпуклой вверх, выпуклой вниз функции и точки перегиба. Доказать теорему о связи второй производной и выпуклости функции.

67. Дать определение вертикальной асимптоты и асимптот на бесконечности к графику функции. Доказать теорему о нахождении асимптот.

68. Описать схему исследования числовой функции для построения её графика, исследовать предложенную преподавателем функцию.

69. Описать схему исследования параметрически заданной кривой. Привести пример, не из лекции.

Примеры задач (Проверяется ИОПК 1.2- ИОПК 1.3 – в части методов, основанных на пределе, непрерывности и дифференцируемости функций):

Задача 1. Найти предел функции.

Задача 2. Применить функцию одной переменной для нахождения наибольшего / наименьшего значения.

Экзамен во втором семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и две задачи.

Продолжительность экзамена для одного студента – 2 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов на экзамен во втором семестре:

(Проверяется ИОПК 1.1–– ИОПК 1.3 в разделе «Интегрирование. Ряды. Дифференцирование функций многих переменных»)

1. Комплексные числа: формы записи, арифметические действия, формула Эйлера.
2. Сформулировать основную теорему алгебры. Разложение многочленов с вещественными коэффициентами (с доказательствами). Разложение дробно-рациональных функций на простые дроби.
3. Дать определение первообразной и неопределенного интеграла. Выписать таблицу неопределенных интегралов.
4. Доказать теоремы об интегрировании подстановкой и по частям в неопределенном интеграле. Привести примеры.
5. Интегрирование дробно-рациональных функций: 4 вида простых дробей, метод неопределенных коэффициентов. Описать интегрирование дроби третьего или четвертого вида.
6. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций сведением к дробно-рациональным функциям. Описать интегрирование универсальной подстановкой.
7. Интегрирование иррациональных функций подстановками Чебышева. Рассмотреть один случай подробно, остальные кратко.
8. Интегрирование иррациональных функций подстановками Эйлера. Рассмотреть один случай подробно, остальные кратко.
9. Определенный интеграл от функции на отрезке – дать определение. Доказать необходимое условие интегрируемости. Определить суммы Дарбу, доказать их свойства. Построить иллюстрации.
10. Сформулировать критерий интегрируемости, использующий суммы Дарбу. Доказать его, используя свойства сумм Дарбу.
11. Описать два класса интегрируемых функций. Доказать интегрируемость для одного из классов функций. Привести примеры интегрируемых и неинтегрируемых функций на отрезке.

12. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать линейность, аддитивность интеграла, а также интегрируемость модуля интегрируемой функции.
13. Сформулировать и доказать первую теорему о среднем для определенного интеграла. Сформулировать следствия из нее, привести пример использования.
14. Сформулировать и доказать непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Получить формулу Ньютона-Лейбница для непрерывной функции.
15. Сформулировать и доказать теоремы о замене переменного и интегрировании по частям для определенного интеграла. Привести примеры их применения.
16. Дать определение площади плоской фигуры. Сформулировать критерии квадрируемости. Записать формулы для площади криволинейной трапеции и криволинейного сектора. Одну из формул доказать.
17. Дать определение объема трехмерного тела. Записать формулы для объема цилиндрического тела и объема тела при известных площадях сечения. Получить одну из формул.
18. Дать определение простой гладкой спрямляемой кривой в трехмерном пространстве и ее длины. Получить формулу для вычисления длины кривой.
19. Определение моментов и центра масс плоской кривой с помощью определенного интеграла. Выписать формулы, одну из них объяснить подробно.
20. Определение моментов и центра масс криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла. Выписать формулы, объяснить одну из них. Сформулировать и доказать теорему Гульдина.
21. Дать определение несобственных интегралов первого и второго рода. Доказать мажорантный признак сходимости. Привести примеры.
22. Сформулировать обе формулы Боннэ и вторую теорему о среднем для определенного интеграла. Дать геометрическую интерпретацию всех трех формул. Показать их применение для сходимости несобственных интегралов.
23. Числовые ряды. Определение суммы ряда, необходимое условие сходимости, критерий Коши сходимости числового ряда.
24. Сформулировать и доказать признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами. Привести примеры.
25. Сформулировать признаки Даламбера, Коши для рядов с неотрицательными членами. Доказать один из них. Привести примеры.
26. Сформулировать и доказать интегральный признак сходимости. Получить условие сходимости обобщенного гармонического ряда.
27. Абсолютная и условная сходимость ряда. Сформулировать и доказать признак Лейбница. Привести пример его применения.
28. Абсолютная и условная сходимость ряда. Сформулировать признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда. Доказать один из признаков. Привести пример.
29. Сформулировать теоремы Коши и Римана о перестановках членов ряда. Привести примеры ряда, сумма которого меняется после перестановки его членов.
30. Дать определение комплексного степенного ряда. Доказать существование круга сходимости и одну из формул для радиуса сходимости степенного ряда. Рассмотреть пример вещественного степенного ряда.
31. Дать определение ряда Тейлора для функции в точке, доказать условие сходимости ряда Тейлора к значениям функции. Получить ряд Тейлора для какой-нибудь функции в точке $x_0 \neq 0$.
32. Выписать стандартные разложения в ряд Маклорена, получить некоторые из них, указать интервалы сходимости. Доказать, что полученные ряды сходятся к функциям, которые разлагали.

33. Дать определение равномерной сходимости функционального ряда на множестве. Привести пример. Сформулировать теоремы, использующие равномерную сходимость. Доказать одну их них.
34. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы вещественного степенного ряда на интервале сходимости. Сформулировать и доказать теорему Абеля о непрерывности суммы на конце интервала сходимости.
35. Сформулировать теорему о почленном интегрировании и дифференцировании вещественного степенного ряда. Привести примеры применения этой теоремы. Доказать возможность почленного интегрирования через равномерную сходимость.
36. Определить частные производные и дифференциал функции нескольких переменных. Доказать непрерывность дифференцируемой функции и дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные.
37. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании композиции. Получить формулы для частных производных сложной функции. Доказать инвариантность формы первого дифференциала.
38. Доказать формулу конечных приращений Лагранжа для функции нескольких переменных и следствие из нее для функции, имеющей нулевой дифференциал.
39. Дать определение и доказать формулу для вычисления производной по направлению. Дать определение градиента. Доказать теорему о свойствах градиента функции в точке.
40. Дать определение касательной плоскости. Вывести уравнение касательной плоскости к графику функции двух переменных в следующих случаях: 1) функция задана явно , 2) функция задана неявно в окрестности точки графика.
41. Дать определение дифференциала второго и высших порядков. Сформулировать теорему о равенстве смешанных производных. Показать на примерах это равенство.
42. Записать и доказать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции нескольких переменных. Записать остаточный член в форме Пеано. Привести пример разложения по формуле Тейлора функции 2-х переменных.
43. Дать определение локального экстремума функции нескольких переменных. Сформулировать и доказать первое и второе необходимые условия экстремума. Привети пример нахождения стационарных точек функции 3-х переменных.
44. Сформулировать и доказать теорему о достаточных условиях для экстремума функции нескольких переменных. Привести примеры квадратичных форм различных видов.
45. Дать определение неявной функции одной переменной. Привести пример. Доказать теорему о существовании, единственности, непрерывности неявной функции.
46. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании неявной функции одной переменной. Привести пример.
47. Привести пример неявной функции нескольких переменных. Сформулировать теорему о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости такой функции.
48. Дать определение матрицы Якоби отображения, якобиана. Сформулировать свойства и привести пример матрицы Якоби.
49. Привести пример неявного отображения. Сформулировать теорему о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости неявного отображения.
50. Дать определение условного экстремума функции нескольких переменных. Указать два способа его нахождения: прямой и метод Лагранжа. Сформулировать теоремы, необходимые для использования метода Лагранжа. Привести пример.

Примеры задач:

(Проверяется ИОПК 1.1-– ИОПК 1.3 – в части методов, связанных с применением интеграла одной переменной и дифференциального исчисления функций нескольких переменных)

Задача 1. Применить определеный интеграл для нахождения площади / длины / объема тела.

Задача 2. Применить функцию нескольких переменных для решение задачи на экстремум.

Экзамен в третьем семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и две задачи.

Продолжительность экзамена для одного студента – 2 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов на экзамен в третьем семестре:

(Проверяется ИОПК 1.1-– ИОПК 1.3 – в разделе «Интегрирование функций нескольких переменных. Ряды Фурье. Интегралы с параметрами»)

1. Криволинейный интеграл первого рода: определение, свойства, вычисление (доказать).
2. Криволинейный интеграл второго рода: определение, свойства, вычисление (доказать).
3. Двойной интеграл: определение, свойства, площадь плоской области, *теорема о среднем значении* (сформулировать).
4. Двойной интеграл: сведение к повторному интегралу (доказать).
5. Сформулировать и доказать формулу Грина, следствие из неё о нахождении площади плоской области.
6. Сформулировать и доказать теоремы о критериях полного дифференциала для функции двух переменных.
7. Сформулировать и доказать теорему о площади области при переходе к другим координатам.
8. Сформулировать и доказать теорему о замене переменных в двойном интеграле.
9. Тройной интеграл: определение, свойства, сведение к повторному (сформулировать). *Теорема о среднем значении.*
10. Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Рассмотреть переход в сферические и цилиндрические координаты (якобиан, геометрический смысл).
11. Дать определение простой, гладкой, кусочно-гладкой поверхности в $\mathbf{R}^3$, особых точек на поверхности. Сформулировать и доказать теорему о касательной плоскости к гладкой поверхности.
12. Дать определение площади гладкой поверхности, доказать формулу для её вычисления.
13. Получить различные формулы для вычисления площади поверхности.
14. Поверхностный интеграл первого рода: определение, существование, вычисление (доказать) для гладкой и кусочно-гладкой поверхностей. *Теорема о среднем значении*.
15. Определить понятие ориентации для гладкой и для кусочно-гладкой поверхности. Как согласуются ориентация поверхности и её края? Привести примеры.
16. Сформулировать лемму о согласовании ориентаций гладкой поверхности и её края с помощью параметризации. Привести пример.
17. Поверхностный интеграл второго рода: определение, существование, вычисление (доказать) для гладкой и кусочно-гладкой поверхностей.
18. Формула Гаусса – Остроградского: сформулировать и доказать.

19. Формула Стокса: сформулировать и доказать.
20. Сформулировать и доказать теоремы о критериях полного дифференциала для функции трёх переменных.
21. Определить дифференциальные операторы: градиент скалярного поля, ротор и дивергенция векторного поля. Доказать их инвариантность.
22. Повторные дифференциальные операторы: рассмотреть все возможные случаи. Доказать
23. Определить потенциальное векторное поле. Сформулировать и доказать критерий для потенциальности поля в поверхностно-односвязной области.
24. Определить соленоидальное векторное поле. Сформулировать и доказать критерий для соленоидальности поля в выпуклой области.
25. Сформулировать теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании собственного интеграла по параметру. Доказать одну из теорем. Привести пример.
26. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать и доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла. Привести пример.
27. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать и доказать признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла. Привести пример.
28. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Привести пример.
29. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Сформулировать правило Лейбница дифференцирования несобственного интеграла по параметру. Привести пример.
30. Несобственный интеграл 1-го и 2-го рода, зависящий от параметра – определить. Равномерная сходимость по параметру – определить. Интеграл Дирихле – разодрать подробно.
31. Дать определение бета- и гамма-функции. Сформулировать свойства гамма-функции. Доказать теорему о непрерывности и дифференцируемости гамма-функции. Привести пример применения гамма-функции.
32. Дать определение бета- и гамма-функции. Сформулировать свойства бета-функции. Привести пример нахождения значений гамма-функции и бета-функции.
33. Дать определение тригонометрического ряда Фурье для числовой функции на интервале $(-\pi, \pi)$. Получить формулы для коэффициентов Эйлера – Фурье почленным интегрированием ряда.
34. Сформулировать и доказать формулы интегрального представления частичных сумм тригонометрического ряда Фурье.
35. Сформулировать и доказать лемму Римана и принцип локализации для тригонометрического ряда Фурье. Найти пределы (при $n \to \infty$) коэффициентов Эйлера-Фурье с помощью леммы Римана.
36. Сформулировать и доказать признак Дини сходимости ряда Фурье, а также следствие из этого признака. Привести пример сходящегося ряда Фурье и его суммы.
37. Записать различные формы разложения функции в тригонометрический ряд Фурье: на интервале произвольной длины, только по синусам, только по косинусам, показательную форму ряда Фурье. Привести объяснения для каждого случая.

Примеры задач:

(Проверяется ИОПК 1.1–– ИОПК 1.3 – в части методов, связанных с интегрированием функций нескольких переменных, рядами Фурье, интегралами с параметрами)

Задача 1. Найти работу поля при движении по кривой / поток поля через поверхность.

Задача 2. Разложить функцию в ряд Фурье.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Студент освобождается от решения задач, если сдал соответствующие темы на практических занятиях. Студент (по его желанию) освобождается от первого вопроса билета, если получил оценку на коллоквиуме по этой теме.

Оценка ставится за ответы на вопросы билета при условии, что обе задачи решены или студент освобожден от их решения.

Оценка *«неудовлетворительно»* ставится, если не решена хотя бы одна из двух задач либо обе задачи решены, но на один из вопросов не дан ответ.

Оценка *«удовлетворительно»* ставится, если решены обе задачи (или студент освобожден от решения задач), даны неполные ответы на оба вопроса билета, студент показал понимание своих ответов, ответив на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка *«хорошо»* ставится, если решены обе задачи (или студент освобожден от решения задач), даны не достаточно полные ответы на оба вопроса билета, студент показал понимание вопросов билета, ответив на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка *«отлично»* ставится, если решены обе задачи (или студент освобожден от решения задач), даны достаточно полные ответы на оба вопроса билета, студент показал глубокое понимание вопросов, ответив на дополнительные вопросы преподавателя.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в среде электронного обучения iDO -

(1семестр) - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=27893

(2 семестр) - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=25648

(3 семестр) - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=26004

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине находятся в соответствующих курсах MOODLE

в) План практических занятий по дисциплине.

1 семестр.

1. Комбинаторика и бином Ньютона.
2. Множества. Операции над множествами
3. Отображение, функция. Образ, прообраз
4. Построение графиков функций элементарными средствами. Основные элементарные функции.
5. Композиция функций, обратная функция

6. Числовые множества. Точные грани.
7. Параметрические кривые – функции и не функции
8. Метод математической индукции
9. Метод математической индукции.
2-й час: самостоятельная работа: множества, отображения, матем. индукция.
10. Предел последовательности – определение
11. Предел последовательности №58-66 из задачника Демидовича с разбором
12. Нахождение пределов с использованием теорем об арифметических действиях
13. Нахождение пределов. Т. о трех последовательностях.
14. Предел монотонной последовательности. Число е. Критерий Коши.
15. ***Контрольная работа. Предел последовательности***
16. Предел функции – определения Коши и Гейне
17. Различные виды пределов
18. Нахождение пределов функций (первый замечательный предел)
19. Нахождение пределов функций (второй замечательный предел)
20. О-символика.
21. Непрерывность. Точки разрыва.
22. ***Контрольная работа. Предел и непрерывность функции***
23. Производная – по определению.
24. Первый дифференциал. Касательная. Техника дифференцирования.
25. Техника дифференцирования.
26. Правило Лопиталя.
27. Пр. Лопиталя. 2-й час: ***самостоятельная работа*** – производная и правило Лопиталя
28. Формула Тейлора
29. Исследование функции – пределы, точки разрыва, асимптоты на графике
30. Исследование функции – использование первой и второй производной
31-32. Исследование функций и параметрических кривых, построение их графиков. Применение к решению задач на наибольшее, наименьшее значение.

Индивидуальная работа: построение графика функции, параметрической кривой, задача на экстремум.

2 семестр.

1. Интегрирование простейших функций, метод подведения под знак дифференциала.
2. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных дробей.
4. Интегрирование рациональных дробей, метод Остроградского.
5. Интегрирование иррациональных функций.
6. Подстановки Чебышева и Эйлера.
7. Интегрирование тригонометрических функций.
8. Интегрирование различных функций – подготовка к контрольной работе.
9. ***Контрольная работа – «Неопределённый интеграл».***
10. Определённый интеграл. Интегральные суммы, суммы Дарбу, определение определённого интеграла.
11. Замена переменных и интегрирование по частям в определённом интеграле.
12-13. Приложения определённого интеграла – длина дуги, площадь, объём, физические приложения.

Индивидуальная работа «Определенный интеграл»

14. Предел функции многих переменных. Дифференцирование.

15. Дифференцируемость функции многих переменных. Касательная плоскость. Производная по направлению.

16. Дифференциал. Дифференцируемость сложной функции.

17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

18. Экстремум функции многих переменных.

19. Замена переменных.

20-21. Неявные функции – теорема существования, дифференцирование, разложение по формуле Тейлора, задачи на экстремум.

22. Условный экстремум.

23. Контрольная работа – «Функции многих переменных».

24. Числовые ряды. Непосредственное суммирование, критерий Коши, признаки сравнения.

25. Признаки Даламбера, Коши, Маклорена-Коши, Раабе, Гаусса.

26. Сходимость произвольных рядов. Абсолютная и условная сходимость.

27. Равномерная сходимость последовательности и ряда.

28. Достаточные признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле.

29. Определение области сходимости функционального ряда.

30. Степенной ряд, радиус сходимости.

31. Ряд Тейлора, конкретные разложения.

32. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Задачи на суммирование.

Самостоятельная работа «Числовые и степенные ряды»

3 семестр.

1.Криволинейные интегралы 1 рода, 2 рода

2.Двойные интегралы.

3.Двойные интегралы.

4.Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

5.Замена переменных в двойном интеграле

6,7.Поверхностный интеграл 1 рода. Поверхностный интеграл 2 рода.

8.Формула Стокса

9.Тройной интеграл.

10.Формула Гаусса-Остроградского.

11.Замена переменных в тройном интеграле.

12.Контрольная работа: криволинейные, двойные интегралы, поверхностные, тройные интегралы.

13,14.Ряды Фурье.

15,16 Интегралы, зависящие от параметра. Бета- и Гамма –функции.

Индивидуальная работа. Интегралы с параметрами. Ряды Фурье.

д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Для того, чтобы успешно освоить дисциплину «Математический анализ», необходимо:

- посещать все лекционные и практические занятия;
- выполнять домашние задания в письменной форме или в форме тестов и заданий (в зависимости от содержания домашних заданий);
- при возникновении проблем с домашними заданиями посещать консультации, проводимые преподавателями;
- вовремя решать необходимые контрольные работы (на практических занятиях) и индивидуальные работы (как домашние задания).

- при подготовке к экзамену использовать собственные конспекты лекций и литературу, рекомендованную преподавателем;

- Использовать предэкзаменационную консультацию для того, чтобы прояснить непонятные вопросы теории и практики.

В экзамен входит: теоретический материал, практические задания. Показав положительные результаты обучения на практических занятиях, студенты освобождаются от практических заданий на экзамене.

Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1.Введение в математический анализ : методическая разработка /Том. гос. ун-т, Мех.-мат. фак., Каф. общ. математики ; сост.: Кошельский Ю. К., Панько С. В., Путятина Е. Н. Томск : [б. и.] , 2007

2. Отображения и функции : методическая разработка /сост. Ю. К. Кошельский, С. В. Панько, Е. Н. Путятина ; Том. гос. ун-т.Томск : [б. и.] , 2007

3. Математический анализ в примерах и задачах Электронный ресурс : учебно-методический комплекс /Панько С. В., Путятина Е. Н., Кошельский Ю. К. ; Том. гос. ун-т, Ин-т дистанционного образования

4. Производная. Дифференциал : методическая разработка /сост. Ю. К. Кошельский, С. В. Панько, Е. Н. Путятина ; Том. гос. ун-т, Механико-математический фак., Каф. общей математики. Томск : [б. м.] , 2006

5. Формула Тейлора. Правило Лопиталя : методическая разработка /Том. гос. ун-т, ММФ, Каф. общей мат. ; сост.: Кошельский Ю. К., Панько С. В., Путятина Е. Н. Томск : [б. и.] , 2006

6. Исследование и построение графиков функций : методическая разработка /Том. гос. ун-т, Мех. -мат. фак., Каф. общ. математики ; сост.: Путятина Е. Н., Устинова И. Г. Томск : [б. и.] , 2011

7. Неопределенный интеграл : методическая разработка : [для студентов физического, физико-технического, радиофизического факультетов дневной формы обучения] / Том. гос. ун-т, Мех.-мат. фак., Каф. общей математики ; [сост. Е. Н. Путятина]. - Томск : [ТГУ], 2013.

8. Числовые ряды и бесконечные произведения : методическая разработка /Том. гос. ун-т, мех.-мат. фак., каф. общей математики ; сост. Путятина Е. Н.
Томск : [б. и.] , 2012

9. Контрольные задания по теме "Функции нескольких переменных" : для студентов 1 курса ФФ, ФТФ, РФФ / сост. : Галанова Н. Ю. , Лазарева Е. Г. ; Том. гос. ун-т. - Томск : [Том. гос. ун-т], 2001. - 17 с.

10. Интегрирование функций нескольких переменных : методическая разработка / Том. гос. ун-т, ММФ, Каф. общ. мат. ; сост.: Е. Г. Лазарева. - Томск : [б. и.], 2006. - 48 с.

11. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра : методическая разработка / Том. гос. ун-т, Механико-мат. фак. , Каф. общей математики ; сост. : Лазарева Е. Г.. - Томск : [б. и.], 2004. - 35 с.: ил.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1, 2. М: Физматлит, 2019.

3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 624 с.. URL: https://e.lanbook.com/book/184105.

4. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа Т.1, Т. 2, кн. 1,2, Т.3. - Москва: Юрайт , 2016.

5. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу Т.1, 2, 3. - Москва: Физматлит, 2009 – 2016.

б) дополнительная литература:

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.

2. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Спб: Лань, 2008.

3. Зорич В.А. Математический анализ Т.1, Т.2. М.: Изд-во: МЦНМО, 2007.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т.1,2,3.- Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2016.

5. Камынин Л.И. Курс математического анализа Т.1, Т.2. М: Изд-во МГУ, 2001.

6. Тер Крикоров А.М., Шабунин М.И., Курс математического анализа. Изд-во: Лаборатория знаний, 2016.

7. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Изд-во: МЦНМО, 2017.

в) ресурсы сети Интернет:

– Математический анализ (часть 1) https://stepik.org/course/716/

– Математический анализ (часть 2) https://stepik.org/course/711/

– Математический анализ https://www.lektorium.tv/matematicheskij-analiz

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

– ЭБС Консультант студента – http://www.studentlibrary.ru/

– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/

– ЭБС ZNANIUM.com – https://znanium.com/

– ЭБС IPRbooks – http://www.iprbookshop.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Лазарева Елена Геннадьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей математики ММФ ТГУ, доцент

Галанова Наталия Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей математики ММФ ТГУ, доцент
Путятина Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей математики ММФ ТГУ, доцент