

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Теория вероятностей

по направлениям подготовки / специальностям

01.03.01 Математика

01.03.03 Механика и математическое моделирование

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленности (профили) подготовки/ специализации:

Современная математика и математическое моделирование

Теоретическая, вычислительная и экспериментальная механика

Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения

Очная

Квалификация

Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель /

Исследователь в области математики и компьютерных наук

Механик. / Механик. Исследователь

Год приема

2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л.В. Гензе

Председатель УМК

Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

ПК-3 Способен проводить эффективный статистический анализ данных и строить стохастические модели на основе оптимальных вероятностных методов.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

РОПК-3.1 Знает:

- актуальные методы и передовые результаты в области стохастического анализа и его применений

РОПК-3.2 Будет владеть фундаментальными знаниями и базовыми навыками в области ТВ и МС для применения в части:

- разработки и совершенствования статистических и вероятностных методов анализа числовой и нечисловой информации

- разработки оптимальных вероятностных методов принятия решений в области финансовой и актуарной деятельности

РОПК-3.3 Будет владеть фундаментальными знаниями и базовыми навыками в области ТВ и МС для освоения:

- навыков подготовки аналитических отчетов, а также обзоров, докладов, рекомендаций по результатам проведенных статистических расчетов

- основных методов стохастического анализа финансовых рынков для актуарных расчетов

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- контрольная работа;
- коллоквиум.

Контрольная работа 1 (РООПК-1.1, 1.2, 1.3)

Контрольная работа состоит из 3 задач.

Примеры задач:

1. 10 вариантов контрольной работы, написанные на отдельных карточках, перемешиваются и выдаются случайным образом восьми студентам, сидящим в одном ряду, причем каждый получает по одному варианту. Найти вероятности следующих событий:

А – варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными;

В – варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам;

С – будут выданы последовательные номера вариантов.

2. Мишень состоит из круга и двух колец. Попадание в круг дает 10 очков, в первое кольцо – 5 очков, во второе – штраф 1 очко. Вероятности попадания в круг, первое и второе кольца соответственно равны 0,5, 0,3 и 0,2. Построить функцию распределения числа очков, если производится 2 выстрела и результаты независимы; вычислить

математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что число очков будет не меньше 6 и не больше 30.

3. Вакцина против инфекционных заболеваний вызывает нежелательную реакцию в 0,1% случаев и не формирует иммунитет в 0,2% случаев. Положим эти эффекты независимыми. Вакцина назначена 5000 человек. Найти вероятность того, что

- ни у кого нет нежелательной реакции и у всех выработался иммунитет;
- у одного человека появилась нежелательная реакция и у двух не выработался иммунитет.

Контрольная работа 2 (РООПК-1.1, 1.2, 1.3)

Контрольная работа состоит из 3 задач.

Примеры задач:

- В зоомагазине продаются 7 британских котят и 4 бенгальских котенка. Составьте закон распределения случайной величины – числа бенгальских из 5 наудачу выбранных котят. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.
- Дана функция плотности распределения непрерывной случайной величины ξ

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} a(x^2 + 0,5x), & x \in (0,3] \\ 0, & x \notin (0,3] \end{cases}$$

Найти постоянную нормировки a и функцию распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ . Найти вероятность события $\xi \in [-0,5; 1,5]$.

3. Пусть

- $\xi \sim N(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 2\xi^2$.
- $\xi \sim \text{Exp}(\alpha)$, $\alpha = 3$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \ln\xi$.

4. Совместный закон распределения случайных величин ξ и η задан таблицей

ξ, η		v_1	v_2
		2	4
u_1	-2	1/12	1/6
u_2	0	1/12	1/6
u_3	3	1/6	1/3

- Вычислить частные законы распределения составляющих величин ξ и η .
- Определить, зависимы ли они?
- Вычислить $P\left(\left(3\xi + \frac{\eta}{2}\right) \leq 2\right) = ?$
- Найти условное распределение и условное математическое ожидание ξ при условии, что $\eta = 2$ и 4.

5. Непрерывная двумерная случайная величина задана совместной плотностью

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2), & x \in [0,2), y \in [1,2) \\ 0, & x \notin [0,2), y \notin [1,2) \end{cases}$$

- Найти c ,
- одномерную плотность распределения вероятностей случайной величины ξ ,
- условное математическое ожидание $E(\xi | \eta)$.

6. Случайные приращения цен акций двух компаний за день ξ и η имеют совместное распределение, заданное таблицей

ξ, η		η_1	η_2
		-2	+2
ξ_1	-2	0,1	0,4
ξ_2	+2	0,2	0,3

Найти коэффициент корреляции.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если 2 задачи решены без ошибок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если 1 задача решена без ошибок.

Иначе выставляется оценка «неудовлетворительно».

Коллоквиум 1 (РОПК 1.1, 1.2, 1.3)

Билет на коллоквиум состоит из 1 теоретического вопроса.

Перечень теоретических вопросов:

1. Вероятностная модель эксперимента с конечным и счетным числом исходов. Примеры.
2. Классическое определение вероятности события. Примеры.
3. Методы комбинаторики. Примеры.
4. Вероятностное пространство общего вида. Колмогоровское определение вероятностного пространства.
5. Свойства вероятностей событий.
6. Континуальные пространства. Геометрические вероятности. Примеры.
7. Формула для вероятности объединения событий. Условная вероятность. Свойства условных вероятностей.
8. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
9. Независимость событий. Лемма Бореля – Кантелли.
10. Схема Бернулли.
11. Теорема Пуассона и распределение Пуассона.
12. Локальная теорема Муавра – Лапласа. Интегральная теорема Муавра – Лапласа.
13. Биномиальная и полиномиальная модели эксперимента.

Коллоквиум 2 (РОПК 1.1, 1.2, 1.3)

Билет на коллоквиум состоит из 1 теоретического вопроса.

Перечень теоретических вопросов:

1. Случайная величина. Функция распределения случайной величины.
2. Закон распределения дискретной случайной величины.
3. Примеры дискретных распределений.
4. Абсолютно непрерывные распределения.
5. Примеры абсолютно непрерывных распределений.
6. Сингулярные и смешанные распределения.
7. Независимость случайных величин и классов событий.
8. Многомерные распределения и плотности.
9. Преобразования случайных величин.
10. Примеры распределений сумм независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины. Свойства. Примеры.
12. Моменты случайной величины.
13. Дисперсия случайной величины. Свойства. Примеры.
14. Ковариация и корреляция случайных величин. Свойства коэффициента корреляции случайных величин. Связь с независимостью случайных величин.
15. Нормальное распределение (одномерное и многомерное). Свойства нормального распределения.
16. Условные распределения. Условное математическое ожидание относительно случайной величины.

17. Условное математическое ожидание относительно сигма-алгебры и как проекция. Задача о наилучшем приближении.
18. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера.
19. Характеристическая функция. Свойства.
20. Примеры характеристических функций распределений. Формула обращения и следствия из нее.

Критерии оценивания коллоквиума

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы.	В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Знание минимума литературы.	Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано. Знание основной литературы.	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в билете вопрос. Знание основной и дополнительной литературы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в пятом семестре проводится в письменной форме с последующим собеседованием по билетам. Экзаменационный билет содержит теоретический вопрос и задачу.

Примерный перечень теоретических вопросов (РОПК 1.1, 1.2, 1.3):

1. Сходимости по вероятности и в среднем квадратическом последовательностей случайных величин и связь между ними.
2. Сходимость почти наверное последовательностей случайных величин.
3. Слабая сходимость распределений.
4. Закон больших чисел (Теорема Хинчина). Усиленный закон больших чисел.
5. Связь между функциями распределения и характеристическими функциями.
6. Центральная предельная теорема.
7. Скорость сходимости в ЦПТ и ее применения.
8. Оценка погрешности в теореме Пуассона.
9. Теорема Колмогорова-Прохорова. Тождество Вальда и его применение к решению задачи о разорении.
10. Цепи Маркова: основные определения и примеры.
11. Критерий возвратности состояния цепи Маркова.
12. Теорема солидарности и эргодическая теорема.
13. Ветвящиеся процессы. Вид производящей функции потомства.
14. Вероятность вырождения процесса Гальтона-Ватсона.

Задачи на зачет берутся из соответствующих разделов сборника задач:

1. Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей. СПб.: Лань, 2004.

и учебно-методических пособий:

2. Емельянова Т.В., Исаева Н.А. Классическое вероятностное пространство. Методические указания. Часть 1. Томск, ТГУ, 2002.
3. Емельянова Т.В., Исаева Н.А. Геометрические вероятности. Условные вероятности. Схема Бернулли. Методические указания. Часть 2. Томск, ТГУ, 2002.

4. Емельянова Т.В., Исаева Н.А., Кривякова Э.Н. Случайные величины. Методические указания. Часть 3. Томск, ТГУ, 2005.
5. Исаева Н.А., Кривякова Э.Н. Случайные величины. Последовательности случайных величин. Методические указания. Томск, ТГУ, 1989.
(РООПК-1.1, 1.2, 1.3).

Итоговая оценка – среднее арифметическое из оценок за контрольные работы, коллоквиумы и экзамен. При ответе на теоретический вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал, знания основной и дополнительной литературы.

В случае если какая-либо часть текущего контроля не сдана студентом, она переносится на экзамен в виде дополнительного теоретического вопроса и/или задачи по соответствующему разделу.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи (РООПК 1.1-1.3):

1. В лифт 7-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвертом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно;

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

2. Вор задумал совершить кражу между 11 и 12 часами вечера, для совершения которой ему требуется около 15 минут. Какова вероятность того, что вор будет пойман, если моменты прихода вора и полицейского равновероятны в интервале с 11 до 12 часов.

3. В тесте 5 заданий, на каждый из которых дается 4 варианта ответов (один из которых верен). Найти вероятность того, что неподготовленный и поэтому выбирающий ответы наугад студент

а) ответит верно ровно на 3 задания;

б) получит зачет, если для этого необходимо ответить верно не менее, чем на 3 задания.

4. Определить при каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$ является плотностью распределения некоторой случайной величины ξ . Найти функцию распределения, $E\xi$ и $D\xi$.

Ответы к задачам: 1 - $P(A)=1/216$, $P(B)=1/36$, $P(C)=5/9$; 2 - $7/16$; 3 – $0,088$ и $0,1$; 4 - $a = 2/\pi$, $\frac{2}{\pi} \arctg(e^x)$, $\frac{\pi^2}{4}$.

Теоретические вопросы (РОПК 1.1, 1.2, 1.3):

1. Сформулировать аксиомы А.Н. Колмогорова для задания вероятности на измеримом пространстве. Перечислить свойства вероятности.
2. Что такое случайная величина и ее распределение?
3. Перечислить типы сходимостей последовательности случайных величин и распределений.
4. Сформулировать ЗБЧ и УЗБЧ.
5. Сформулировать ЦПТ.

Информация о разработчиках

Пчелинцев Евгений Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций ММФ ТГУ.

Губин Владимир Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ.

Емельянова Татьяна Вениаминовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ.

Мурзинцева Алена Андреевна, ст. преподаватель кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ.

Перелевский Святослав Сергеевич, ст. преподаватель кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ.