

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:  
Декан физического факультета  
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

**Асимптотические методы**

по направлению подготовки  
**03.04.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**«Фундаментальная и прикладная физика»**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Магистр**

Год приема  
**2025**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
О.Н. Чайковская

Председатель УМК  
О.М. Сюсина

Томск – 2025

## 1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ПК 1– Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК 1.1 – Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости.

ИПК 1.2 – Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать.

ИПК 1.3 – Владеет навыками аналитической переработки информации, проведения исследований с помощью современной аппаратуры и информационных технологий, обобщения и представления результатов, полученных в процессе решения задач исследования.

## 2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля.

I. По дисциплине «Асимптотические методы» предусмотрены тесты по разделам: Темы 1-2 (ИПК 1.1, ИПК 1.2). Тесты размещены в системе LMS Moodle ТГУ (Learning Management System Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) по ссылке: <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=24578>

Тесты по курсу составлены на основе банка вопросов в курсе Moodle.

Пример теста по теме 1 курса.

Вопрос: Являются ли вещественные функции вещественной переменной  $f(x)$  и  $g(x)$  асимптотически эквивалентными на некотором множестве  $B$ , если а)  $f = O(g)$   $x \in B$ , б)  $f = o(g)$   $x \in B$ , в)  $|f(x)| = |a(x)| |g(x)|$ , где  $K_1 \leq a(x) \leq K_2$ ,  $K_1, K_2$  - постоянные.

Ключи: а), в).

Критерии оценивания: Прохождение теста при правильном ответе (100%) оценивается в 5 баллов. Максимальная оценка 100%; выбор ответов а) и в) оценивается в 100%; выбор ответа б) оценивается в 0%.

II. По Темам 1-7 в курсе предусмотрены Задания (ИПК 1.1, ИПК 1.2., ИПК 1.3).

Пример Задания по Теме 1.

### Задание по теме 1

Дать ответы (в виде файла или текста) на следующие контрольные вопросы по теме.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение асимптотической последовательности функций  $\{\varphi_n(x)\}$  асимптотической в точке  $x_0$ . Приводит ли к асимптотической последовательности интегрирование и дифференцирование функций  $\varphi_n(x)$ ?
2. Сформулируйте определение асимптотической последовательности функций  $\{\varphi_n(x, y)\}$  асимптотической в точке  $x_0$  равномерной по параметру  $y$ .
3. Задана асимптотическая последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$ ,  $x \rightarrow x_0$ , и некоторая функций  $f(x)$ . Запишите условия, при которых справедливо асимптотическое разложение

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x).$$

4. Объясните утверждение о том, что любой асимптотический ряд имеет сумму.

Студенты выполняют задание в форме эссе.

Критерии оценивания: Представленный файл эссе оценивается по форме элемента Задание системы Moodle: «простое непосредственное оценивание» по шкале в форме Pass/Fail (зачтено/не зачтено).

III. Контрольная работа по курсу проводится в виде решения 2х задач из банка задач (ИПК 1.1, ИПК 1.2). Примеры задач из контрольных работ.

Задача 1. Показать, что при  $x \rightarrow \infty$  функции  $f_n(x) = \int_1^x (e^t / t^n) dt$  и  $g_n(x) = x^{-n} e^x$  асимптотически эквивалентны.

$$\text{Ключ: Вычисление предела } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'_n(x)}{g'_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-n} e^x}{x^{-n} e^x - n x^{-n-1} e^x} = 1$$

доказывает асимптотическую эквивалентность.

Задача 2. При каких условиях последовательность функций  $x^{p_1}, x^{p_2}, \dots, x^{p_n}, \dots$  является асимптотической а) при  $x \rightarrow 0$ , б) при  $x \rightarrow \infty$ .

Ключ: а) при  $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ , б) при  $p_1 > p_2 > \dots > p_n > \dots$

Критерии оценивания: результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если студент предъявляет правильные письменные решения двух задач, то есть для каждой задачи способен обосновать метод решения, понимает используемые термины и формулы и получил правильный ответ. При невыполнении указанных критериев оценки «зачтено» выставляется оценка «не зачтено».

IV. Для углубленного изучения курса по основным разделам курса студентам предлагаются темы для рефератов (ИПК 1.1, ИПК 1.2., ИПК 1.3).

**Темы для рефератов** и учебно-методическая литература для самостоятельной работы по разделам дисциплины «Асимптотические методы»:

Задача реферата – объяснить базовые представления об асимптотических методах и их применения в исследованиях моделей физических явлений, освоить методы построения асимптотических решений уравнений теоретической и математической физики.

*Тема 1. Интегральный оператор Фурье.*

Литература:

– Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье (том 1). — М.: Мир, 1984.

– Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том IV. Интегральные операторы Фурье. — М.: Наука, 1989.

*Тема 2. Индекс Маслова, индекс Морса.*

Литература:

– Арнольд В.И. Динамические системы-1: Книга 1: Обыкновенные дифференциальные уравнения/ В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко, Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, И. У. Бронштейн, В. З. Гринес. — М.: Наука, 1985.

– В. Е. Назайкинский, Б.-В. Шульц, Б. Ю. Стернин, Индекс интегральных операторов Фурье на многообразиях с коническими особенностями // Изв. РАН. Сер. матем., 65:2 (2001), 127–154

– Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущения. — М.: Наука, 1988.

– Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики/ В.П. Маслов, М.В. Федорюк. — М.: Наука, 1976.

### **3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

В курсе «Асимптотические методы» используется балльно-рейтинговая система оценки знаний. Максимальная сумма баллов по дисциплине составляет 100 баллов и формируется следующим образом: 60 баллов по результатам текущей аттестации и 40

баллов по результатам промежуточной аттестации (зачет). Итоговая оценка по дисциплине складывается из суммы баллов, полученной по итогам текущего контроля и промежуточной аттестации (устного зачета).

Текущая аттестация включает:

- активность студента на практических занятиях (0-20 баллов); весь семестр разбит на 2 этапа по две недели, баллы выставляются в конце каждого этапа (0-20 баллов).
- реферат (0-20 баллов), при невыполнении срока сдачи реферата за каждую просроченную неделю снимается 5 баллов;

Промежуточная аттестация проводится в форме устного зачета который предусматривает дифференцированное оценивание ответа (0-40 баллов).

**Зачет во 2 семестре** проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит два теоретических вопроса, проверяющие компетенции ПК 1.1, в соответствии с индикаторами ИПК 1.1, ИПК 1.2. После ответа на билет студент отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов, открытого банка задач, тестов (п. 2), направленные на проверку достижения индикаторов ИПК 1.2 и ИПК 1.3.

Примерный перечень теоретических вопросов.

Вопрос 1. Опишите получение асимптотических оценок интегралов зависящих от малого параметра.

Вопрос 2. Объясните, в чем состоит метод стационарной фазы.

Примеры задач.

Задача 1. Покажите, что  $o(o(f(z))) = o(f(z))$ ,  $(z \rightarrow z_0)$ .

Задача 2. Покажите, что последовательность  $\{z^{-n}\}$ ,  $(z \rightarrow \infty)$  является асимптотической.

Отметка в 40 баллов ставится студенту при правильном ответе не менее чем на 80% вопросов билета и дополнительных вопросов.

**Открытый перечень вопросов, выносимых на зачет.**

1. Соотношения порядка, O-символика. Свойства O-символики.
2. Простейшие асимптотические оценки. Асимптотические ряды.
3. Суммирование асимптотических рядов.
4. Метод Лапласа.
5. Метод стационарной фазы в одномерном случае. Основные определения.
6. Основная теорема метода стационарной фазы.
7. Одномерный волновой пакет и метод стационарной фазы.
8. Асимптотические оценки интегралов зависящих от малого параметра.
9. Рассеяние 3-мерного волнового пакета на силовом центре.
10. Уравнения с малым параметром при производных. Дебаевская процедура.
11. Квазиклассическое приближение в задаче Коши. Основные понятия и определения.
12. Уравнение переноса.
13. Уравнение Гамильтона-Якоби. Бихарактеристики. Лагранжевы многообразия.
14. Метод ВКБ для обыкновенного дифференциального уравнения. Схема метода ВКБ. Задача рассеяния.
15. Уравнения в частных производных первого порядка.
16. Построение квазиклассических асимптотик нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера.
17. Квазиклассическая асимптотика для стационарного одномерного уравнения Шрёдингера.
18. Сшивание локальных асимптотик. Квантование замкнутых кривых.
19. Канонический оператор (одномерный случай).
20. Квазиклассическая асимптотика уравнения Шрёдингера.
21. Квазиклассическое представление.
22. Квазиклассическое приближение для нелинейного уравнения Шрёдингера.

23. Класс траекторно сосредоточенных функций.
24. Квазиклассические асимптотики с комплексными фазами для нестационарного уравнения Шрёдингера.
25. Система в вариациях.
26. Квазиклассические траекторно-когерентные состояния.
27. Производящая функция для квазиклассических траекторно-когерентных состояний.
28. Многомерные полиномы Эрмита.
29. Асимптотики и формула Дюамеля.
30. Конструкция квазиклассических траекторно-когерентных состояний уравнения Шрёдингера.
31. Квантовый гармонический осциллятор.
32. Квазиклассические асимптотики с комплексными фазами для одномерного уравнения Шрёдингера.
33. Квазиклассическая сосредоточенность состояний и вывод классических уравнений движения из квантовой теории.
34. Уравнения Гамильтона-Эренфеста для квантовых средних.

#### 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест (ИПК-1.1.).

Вопрос: Последовательность функций  $\varphi_n(x) = x^n$  является асимптотической при а)  $x \rightarrow 0$ , б)  $x \rightarrow 1$ , в)  $x \rightarrow \infty$ .

Ключи: а).

Задачи (ИПК-1.2, ИПК 1.3).

Задача 1. Пусть  $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda\varphi(x)} dx$ ,  $f(x) \in C_0^\infty([a, b])$ ,  $f^N(a) = f^N(b) = 0$ ,  $0 \leq N \leq \infty$ .  $\varphi'(x) \neq 0$ ,

$x \in [a, b]$ . Показать, что  $\frac{d^j I(\lambda)}{d\lambda^j} = O(\lambda^{-\infty})$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $j \geq 0$ .

Ответ. Доказательство проводится интегрированием по частям:

$I(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{i\lambda\varphi(x)} dx$ ,  $f_1(x) = \left( \frac{f(x)}{i\varphi'(x)} \right)'$ ,  $\dots$ ,  $f_N(x) \in C_0^\infty([a, b])$ . Тогда  $|I(\lambda)| \leq c_N |\lambda|^{-N}$ ,  $c_N = const$ ,

или  $I(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ . Аналогично утверждение доказывается для  $\frac{d^j I(\lambda)}{d\lambda^j}$ .

Задача 2. Найти критическую точку  $x_0$  функции  $f(x) = ax^2$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Ответ. Критическую точку функции  $f(x)$  находим из условия  $f'(x) = 0$ , откуда получаем  $x_0 = 0$ . Критическая точка не вырождена ( $f''(0) = a \neq 0$ ).

Теоретические вопросы (ИПК 1.1, ИПК 1.3):

1. Соотношения порядка и их свойства.
2. Приведите пример записи интеграла с параметром и применения метода стационарной фазы.
3. опишите анзац для построения асимптотического решения.
4. Суммирование асимптотических рядов.
5. Квазиклассическое приближение в задаче Коши. Основные понятия и определения.
6. Построение квазиклассических асимптотик нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера.
7. Метод Лапласа.
8. Одномерный волновой пакет и метод стационарной фазы.
9. Метод ВКБ для обыкновенного дифференциального уравнения. Схема метода ВКБ.
10. Опишите подход к построению квазиклассического решения для нелинейного уравнения Шрёдингера.
11. Связь между решениями системы Гамильтона и уравнения Гамильтона-Якоби.

12. Асимптотическое разложение решений одномерного уравнения Шредингера для частицы во внешнем поле.
13. Класс траекторно сосредоточенных функций. Определение. Основные свойства.
14. Начальные и центральные моменты волновой функции. Уравнение Эренфеста. Система Гамильтона–Эренфеста  $n$ -го порядка.

#### **Информация о разработчиках**

Шаповалов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики ФФ НИ ТГУ.