

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:  
Директор  
А. В. Замятин

Рабочая программа дисциплины

**Дифференциальные уравнения**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:

**Математическое моделирование и информационные системы**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

**2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
К.И. Лившиц

Председатель УМК  
С.П. Сущенко

Томск – 2024

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, теории устойчивости и вариационного исчисления.

– Научиться применять понятийный аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, теории устойчивости и вариационного исчисления для формирования навыков построения математических моделей в виде дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений при решении практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль Модуль «Математика».

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Третий семестр, зачет

Третий семестр, экзамен  
Четвертый семестр, зачет  
Четвертый семестр, экзамен

## 5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Комплексный анализ».

## 6. Язык реализации

Русский

## 7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 з.е., 360 часов, из которых:

-лекции: 64 ч.

-практические занятия: 64 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## 8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Даются основные понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ). Изоклины. Поле направлений. Теорема существования и единственности решения уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной. Уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными. Задача Коши. Однородные уравнения и приводящиеся к ним. Линейные уравнения первого порядка и методы их интегрирования. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Теорема о дифференцируемости решения. Особые точки – узел, седло, фокус, центр. Особые решения.

ДУ, не разрешённые относительно производной. Теорема существования и единственности решения уравнения  $F(x, y, y') = 0$ . Особые решения. Метод введения параметра. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро.

Тема 2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого

Теорема существования и единственности решения уравнения  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Простейшие случаи понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Свойства линейного дифференциального оператора. Теоремы о решениях линейного однородного уравнения. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Различные случаи корней характеристического уравнения. Уравнения Эйлера. Линейные неоднородные уравнения  $n$ -го порядка. Теоремы о решениях линейного неоднородного уравнения. Метод интегрирования линейных неоднородных ДУ. Периодические решения ДУ. Метод малого параметра. Уравнение Эйлера. Кравевые задачи. Функция Грина и её свойства.

Тема 3. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Основные понятия. Интегрирование системы путём сведения к одному уравнению более высокого порядка. Нахождение интегрируемых комбинаций. Свойства оператора  $L$ . Теоремы о решениях линейной системы ДУ. Метод вариации постоянных. Системы

линейных ДУ с постоянными коэффициентами. Методы интегрирования систем ДУ: метод Эйлера, метод Даламбера, метод исключения, матричный метод.

#### Тема 4. Теория устойчивости

Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Простейшие типы точек покоя—узел, седло, фокус, центр. Теорема Ляпунова об устойчивости, теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости, Теорема Четаева о неустойчивости. Исследование на устойчивость по первому приближению. Предельные циклы. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема Малкина.

#### Тема 5. Уравнения в частных производных первого порядка

Основные определения. Теорема Ковалевской. Линейные однородные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения от функции  $n$  переменных. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка с заданными начальными условиями.

#### Тема 6. Вариационное исчисление

Метод вариаций в задачах с неподвижными границами. Вариация и её свойства. Определения 1–9. Понятие функционала. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности.

### 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, контроля выполнения домашних заданий, проведения контрольных работ и фиксации результатов два раза в семестр, проведения коллоквиумов по лекционному материалу.

Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

### 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в третьем и четвёртом семестрах проводится в смешанной форме: в письменной форме материал излагается по билетам, затем возможно обсуждение написанного материала в устной форме. Один экзаменационный билет включает два теоретических вопроса. Другой экзаменационный билет включает задачу в виде примера дифференциального уравнения, системы дифференциальных уравнений, уравнения в частных производных, функционала и т.д. Продолжительность экзамена 1 час 15 мин.

Ответы на оба теоретических вопроса в первом экзаменационном билете даются в развернутой форме и демонстрируют полученные знания, умения и навыки согласно ИОПК-1.2., ИОПК-1.3., ИОПК-1.4.

Задание второго экзаменационного билета оформлено в виде задачи, связанной с построением ДУ, примера ДУ, системы ДУ, функционала, краевой задачи, задачи, связанной с построением функции Грина. Решение поставленной в билете задачи и краткая интерпретация полученных результатов демонстрируют полученные знания, умения и навыки согласно ИОПК-1.2., ИОПК-1.3., ИОПК-1.4., ИОПК-3.1., ИОПК-3.2., ИОПК-3.3., ИОПК-3.4.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Теорема существования и единственности решения уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ .
2. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Теорема существования и решения уравнения  $F(x, y, y') = 0$ .
3. Дифференциальные уравнения порядка выше первого. Теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения вида  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .
4. Теоремы о решениях линейного уравнения  $n$ -го порядка.
5. Решение краевой задачи методом функции Грина.
6. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
7. Теория устойчивости. Основные понятия. Простейшие типы точек покоя. Второй метод А. М. Ляпунова.
8. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.
9. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.
10. Связь с векторным полем. Характеристики. Теорема об общем решении уравнения в частных производных первого порядка.
11. Вариация и ее свойства. Основная лемма вариационного исчисления. Основная теорема вариационного исчисления.
12. Вариационная задача с неподвижными границами. Уравнение Эйлера.
13. Метод вариаций в задачах с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами.
14. Условия трансверсальности.

Примеры задач:

1. Решить уравнение  $(xy' - y)^2 = y'^2 - \frac{2yy'}{x} + 1$ .
2. Построить математическую модель в виде дифференциального уравнения для следующей геометрической задачи:  
Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведёнными из произвольной точки прямой, равен  $2a$ .
3. Найти решения уравнения, удовлетворяющие указанным краевым условиям  $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0$ ;  $y'(1) = 3$ ,  $y(x) = O(x^{-2})$  при  $x \rightarrow +\infty$ .
4. Для краевой задачи построить функцию Грина  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x)$ ;  $y(0)$  ограничено,  $y(1) = 0$ .
5. Матричным методом решить систему уравнений  $\dot{x} = Ax$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .
6. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение уравнения  $\dot{x} = t - x$  с начальным условием  $x(0) = 1$ .
7. Исследовать, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

8. Решить уравнение  $(y + 2z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$ ;  $x = z$ ,  $y = x^2$ .

Найти экстремали функционалов:

9.  $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

10.  $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 - 2yz) dx$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $z(0) = 0$ ,  $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

В 3-ом и 4-ом семестрах предусмотрена промежуточная аттестация в форме зачёта. Пропуски занятий, невыполненные домашние задания по дисциплине «Дифференциальные уравнения», ненаписанные или неудовлетворительно написанные контрольные работы по практическим занятиям влекут за собой неполучение допуска к зачёту.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценки при проведении экзамена формируются в соответствии с нижеприведенной таблицей.

неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
Не ответил ни на один из двух вопросов билета и не решил задачу. Ответил на один из двух вопросов билета и не решил задачу.	Ответил на один из двух вопросов билета и решил задачу.	Ответил на оба вопроса и не полностью решил задачу.	Ответил на оба вопроса и полностью решил задачу.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

### 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

б) План практических занятий по дисциплине.

### 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

– Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физических и физико-математических факультетов. – М.: Эдиториал УРСС. 2000. – 320 с.

– Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. – М.: ЛКИ. 2008. – 208 с.

– Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Физматлит. 2009. – 204 с.

- Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматлит. 2009. – 401 с.
- Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматлит. 2009. – 401 с.
- Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Учебник. – М.: ЛКИ. 2016. – 512 с.
- Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2013. – 349 с.
- Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие. – Изд-во: Ленанд. 2015. – 240 с.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука. 1976. – 576 с.
- Краснов М.Л. Вариационное исчисление / М.Л. Краснов [и др.]. – М.: Наука. 1973. – 190 с.
- Нежелская Л.А. Дифференциальные уравнения первого и высших порядков: учеб. пособие. – Томск: Издательство Томского государственного университета. 2022. – 154 с.

б) дополнительная литература:

- Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов [и др.]. – Изд-во: URSS. 2020. – 256 с.
- Васильева А.Б., Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева [и др.]. – М.: Физматлит. 2005. – 432 с.
- Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. Учебное пособие. – Изд-во: Лань. 2022. – 320 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ [Электронный ресурс] / Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ: [сайт]. – [Томск, 2015]. – URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000525272>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ [Электронный ресурс] / Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ: [сайт]. – [Томск, ИДО ТГУ, 2015]. – URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000516071>
- Электронный ресурс [new.math.msu.ru/diffur/main\\_du\\_ast.pdf](http://new.math.msu.ru/diffur/main_du_ast.pdf)
- Электронный ресурс <http://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/2eb/diffur-arphdejbaa6.pdf>

### 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

### 14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешанном формате («Актру»).

#### **15. Информация о разработчиках**

Нежелская Людмила Алексеевна, д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики НИ ТГУ.