

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан ММФ  
Л.В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

**Избранные вопросы теории чисел**

по направлению подготовки

**01.04.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Фундаментальная математика**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Магистр**

Год приема  
**2023, 2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
П.А.Крылов

Председатель УМК  
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить аппарат дисциплины и получить прочные теоретические знания и практические навыки для возможности дальнейшего развития теоретико-числовых алгоритмов.

– Научиться применять понятийный аппарат теоретико-числовых алгоритмов для решения практических задач профессиональной деятельности, в том числе криптографии и криптоанализе.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Третий семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Теория чисел», «Алгебра», «Математический анализ».

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

в том числе практическая подготовка: 0 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

**Тема 1.** Алгоритмы приведения чисел по модулю.

Алгоритм Баррета. Нахождение обратного элемента в кольцах вычетов.

**Тема 2.** Алгоритмы быстрого возведения в степень.

Алгоритм быстрого возведения в квадрат. Бинарный алгоритм.

**Тема 3.** Дискретное преобразование Фурье.

Примитивные корни. Остаток от деления многочленов.

**Тема 4.** Алгоритм Монгмери.

Умножение по Монгмери. Возведение в степень

**Тема 5.** Нахождение корней многочленов в кольцах вычетов.

Случай простого модуля. Случай степенного модуля.

**Тема 6.** Извлечение корня в кольцах вычетов.

Алгоритм Чипполы. Случаи четной и нечетной степени.

**Тема 7.** Показательные сравнения.

Случаи четного и нечетного модуля.

**Тема 8.** Проверка простоты целых чисел.

Тест Соловея-Штрассена. Числа Кармайкла. Тест Миллера-Рабина. Алгоритм Люка-Лемера. Полиномиальный тест.

**Тема 9.** Построение больших простых чисел.

Тесты на основе теоремы Поклингтона. Алгоритм Маурера. Сильно простые числа. Алгоритм Гордона.

**Тема 10.** Алгоритмы факторизации.

$p$ -Метод Полларда. Метод Ферма.  $(p-1)$ -Метод Полларда. Алгоритм Диксона. Алгоритм Бриллихарт-Моррисона. Метод квадратичного решета.

**Тема 11.** Вычисление дискретных логарифмов.

Алгоритм Гельфонда-Шэнкса. Метод сведения к собственным подгруппам. Метод Сильвера-Полига-Хеллмана.

## 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, деловых игр по темам, выполнения домашних заданий, и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов первой части.

Вопрос. Алгоритм Монтгомери относится к алгоритмам:

- а) нахождения первообразных корней по модулю;
- б) модульной арифметики;
- в) проверки простоты натуральных чисел;
- г) факторизации;
- д) дискретного логарифмирования.

Примерный перечень теоретических вопросов второй части.

Вопрос 1. Доказать теорему Поклингтона о виде простых делителей числа  $N$ , для которого известно частичное разложение на множители числа  $N-1$ .

Вопрос 2. Обосновать принципиальное отличие теста Миллера-Рабина проверки простоты числа от теста Соловея-Штрассена.

Вопрос 3. Докажите, что множество вычетов по модулю  $N$ , относительно которых  $N$  является эйлеровым псевдопростым, образует подгруппу.

Примерный перечень задач из третьей части. Решение при помощи инженерного калькулятора.

Задача 1. При помощи алгоритма Чипполы найти квадратный корень из  $a$  по модулю  $p$ , если  $p = 19$ ,  $a = 13$ .

Задача 2. Решить сравнение  $x^7 = -88 \pmod{841}$ .

Задача 3. Решить сравнение  $11^x = 19 \pmod{529}$ .

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Инд. задание в системе Moodle.	20%	В течение семестра	По 100 бальной системе.
Тесты в системе Moodle.	20%	В течение семестра	Максимальное использование возможностей программы
Экзамен	60%	В конце семестра	Студент допускается до экзамена только при наличии выполненных индивидуального задания и теста. 1) Полный ответ, изложенный кратко и ясно – «отлично». 2) Ответ неполный (но > 70%), пояснения логически непротиворечивы – «хорошо». 3) Ответ неполный (но >50%), отсутствие логики в пояснениях – «удовлетворительно». 4) Ответ неполный (<50%), отсутствие логики в пояснениях или по сути отсутствует – «неудовлетворительно».

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «LMS Ido» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=25414>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине: в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

Содержание дисциплины						
Темы занятий	Контактные часы				Самостоятельная работа	
	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Консультации	Часы СРС	Задания
1. Алгоритмы приведения чисел по модулю.	2					
2. Алгоритмы быстрого возведения в степень.	2					
3. Дискретное преобразование Фурье.	3					
4. Алгоритм Монтгомери.	3					
5. Нахождение корней многочленов в кольцах вычетов	3					
6. Извлечение корня в кольцах вычетов	3					
7. Показательные сравнения.	3					
8. Проверка простоты целых чисел.	3					
9. Построение больших простых чисел.	3					
10. Алгоритмы факторизации	3					
11. Вычисление дискретных логарифмов	4					

Всего (без консультаций)	32					
--------------------------	----	--	--	--	--	--

г) Методические указания по проведению лабораторных работ.  
Полностью и своевременно выполнять домашние задания и тесты. Для контроля следует использовать материалы лекций и семинарских занятий.

д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.  
Чтение основной литературы, указанной в нижеприводимом списке. Для контроля усвоения материала следует самостоятельно повторять доказательства основных теорем курса, а также решать задачи и упражнения, указанные в литературе, использовать электронные ресурсы.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Глухов М.М., Круглов И.А., Пичкур А.Б., Черемушкин А. В. Введение в теоретико-числовые методы криптографии. СПб. Лань, 2021. 400 с.
2. Маховенко Е. Б. Теоретико-числовые методы в криптографии. М.: Гелиос АРВ, 2006. 320 с.
3. Черемушкин А.В. Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии. М.: МЦНМО, 2002. 104 с.

б) дополнительная литература:

1. Василенко О. Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. М.: МЦНМО, 2-е изд. 2007. 336 с.
2. Манин Ю. И., Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. М.: МЦНМО, 2013. 552 с.
3. Авдошин С. Дискретная математика. Модулярная алгебра, криптография, кодирование. Москва: СИНТЕГ, 2016. - 260 с.
4. Арнольд И.В. Теория чисел. М.: Ленанд, 2019. – 288 с.
5. Боревиц З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Ленанд, 2019. – 504 с.
6. Панкратова И. А. Теоретико-числовые методы в криптографии. Томск, 2009. 120 с.

в) ресурсы сети Интернет, открытые онлайн-курсы:

- <https://stepik.org/course/87474/promo>
- <https://www.youtube.com/playlist?list=PL-cKNuVAYAW9WQYuzKGIIdnlQTbo3x33G>
- <https://academiait.ru/course/algorithm/>
- [https://romanementsov.ru/Курсы\\_Алгоритмы\\_Данных/](https://romanementsov.ru/Курсы_Алгоритмы_Данных/)
- сайт журнала «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» <http://journals.tsu.ru/mathematics/>

## 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –  
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>  
– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>  
– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

в) профессиональные базы данных:

- [Web of Science](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/web-of-science) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/web-of-science>
- [Scopus](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/scopus) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/scopus>
- [zbMATH](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/zbmath) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/zbmath>
- [Архив журналов РАН](https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/arhiv-zhurnalov-ran) <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/arhiv-zhurnalov-ran>
- Университетская информационная система РОССИЯ – <https://uisrussia.msu.ru/>

#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Лаборатории 2-го корп., оборудованные для проведения занятий в Moodle: 324, 316 и 319.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Актру»). Это аудитории 2-го корп.: 428, 121, 124, 302, 411, 423.

#### **15. Информация о разработчиках**

Чехлов Андрей Ростиславович, д.ф.-м.н., профессор каф. алгебры ТГУ.