

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт биологии, экологии, почвоведения, сельского и лесного хозяйства
(Биологический институт)

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
Д. С. Воробьев

Оценочные материалы по дисциплине

Высшая математика

по направлению подготовки

05.03.06 Экология и природопользование

Направленность (профиль) подготовки:
Экология

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
А.М. Адам

Председатель УМК
А.Л. Борисенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять базовые знания фундаментальных разделов наук о Земле, естественно-научного и математического циклов при решении задач в области экологии и природопользования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Владеет знаниями фундаментальных разделов наук естественно-научного и математического циклов для решения задач в области экологии, охраны окружающей среды и природопользования

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: контрольные работы.

ВАРИАНТ № 1

1. Решите по формулам Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 12, \\ x + y = 4, \\ -3y + 2z = -7. \end{cases}$$

2. Найдите хотя бы одно решение системы линейных уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 2t = 1, \\ 3x - y - 3z - t = 2, \\ 5x + 9y + 5z + 3t = 4. \end{cases}$$

3. Найдите $|\vec{a}|$, если $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{r}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{r}| = 2$, $\vec{p}, \vec{r} = 60^\circ$.

4. Запишите уравнение высоты AH треугольника ABC , если $A(5; -2)$, $B(0; -3)$, $C(6; -1)$.

ВАРИАНТ № 2

1. Решите по формулам Крамера систему уравнений
$$\begin{cases} -x + 4y + 7z = 0, \\ 2y + 8z = 6, \\ x - 2y - z = 4. \end{cases}$$

2. Найдите хотя бы одно решение системы линейных уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 4t = 6, \\ -2x + 3y - z + 3t = 4, \\ 3x - 6y + 3z - 7t = 2. \end{cases}$$

3. Найдите площадь треугольника ABC , если $A(-2; 1; 1)$, $B(0; -3; -3)$, $C(-2; -5; -2)$.

4. Запишите уравнение окружности с центром в точке $C(-5; 8)$, проходящей через точку $A(3; 2)$.

Ответы.

ВАРИАНТ 1. 1) $x=3, y=1, z=-2$ $\Delta=1$ 3) 2 4) $3x+y-13=0$

ВАРИАНТ 2. 1) $x=3, y=-1, z=1$ $\Delta=4$ 3) 9 4) $x^2+y^2+10x-16y-11=0$

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

В первом семестре зачет проводится в устной и письменной форме. Билет содержит теоретический вопрос и одну задачу.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопросы к зачёту.

Семестр 1.

1. Определители. Системы линейных уравнений. Метод Крамера и Гаусса.
2. Векторы и действия с векторами. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.
3. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости. Кривые второго порядка.
4. Определение предела числовой последовательности, предела функции.
5. Определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Доказать теорему о связи между ними и теорему о свойствах бесконечно малых.
6. Первый замечательный предел функции: формулировка, доказательство, следствия из него. Непрерывность функции. Непрерывность основных элементарных функций. Второй замечательный предел последовательности и функции.
7. Определение производной и первого дифференциала функции в точке, теорема о связи между ними. Уравнение касательной к дифференцируемой функции в точке.
8. Производная суммы, произведения, частного, композиции. Сформулировать инвариантность формы первого дифференциала.
9. Записать таблицу производных основных элементарных функций. Получить несколько из записанных формул.
10. Сформулировать необходимые и достаточные условия локального экстремума функции. Дать определение выпуклой вверх, выпуклой вниз функции и точки перегиба. Связь второй производной и выпуклости функции.
11. Дать определение вертикальной асимптоты и асимптот на бесконечности к графику функции. Описать схему исследования числовой функции для построения ее графика.

Примеры задач:

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Решите систему методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ 6x + 3y - z = -3 \\ x - y - 3z = -3 \end{cases}$$

3. Решите систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x + 2y + 2z + t = 0 \\ x - 15y + 3z + 2t = 0 \\ 3x - 17y + 5z + 2t = 0 \\ 8x + 4z + t = 0 \end{cases}$$

4. Вычислите площадь параллелограмма, образованного векторами \vec{a} и \vec{b} и угол между диагоналями параллелограмма $\vec{a} = (-2, 4, 1)$, $\vec{b} = (5, -3, 0)$

5. Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках А, В, С, D и площадь грани BCD
 $A(-1, 2, -3)$, $B(4, -1, 0)$
 $C(2, 1, -2)$, $D(3, 4, 5)$

6. Напишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки E и F. Постройте прямую, покажите угол между прямой и осью OX, найдите тангенс этого угла. $E(0, 2)$, $F(2, 3)$

7. Напишите канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве
 $3x + 4y - 2z + 1 = 0$,

$$2x - 4y + 3z + 4 = 0$$

8. Напишите уравнение гиперболы, проходящей через точки А, В. Постройте кривую, асимптоты кривой, укажите фокусы. Найдите угол между асимптотами.

$$A(-6, 0), B(8, -\sqrt{7})$$

9. Найдите расстояние от точки К до плоскости, проходящей через точки Р, Е, F

$$P(-1, 2, -3), E(2, -1, 0)$$

$$F(2, 1, -2), K(2, -4, -5)$$

10. Вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 13x + 12}$$

11. Вычислите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x^2 + 1}{3x^4 + 2x^2 + 1}$$

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из двух вопросов и задачи. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Определение первообразной, неопределённого интеграла. Таблица интегралов. Лемма о множестве первообразных (док-во). Свойства неопределённого интеграла. Замена переменной в неопределённом интеграле. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле (док-во). Способы выбора u, dv .
2. Определение определённого интеграла. Геометрический смысл определённого интеграла. Свойства определённого интеграла. Вычисление площади плоской фигуры. Кривые, заданные параметрически. Примеры: циклоида, астроида, эллипс. Полярные координаты, их связь с декартовыми. Примеры: окружность, кардиоида, спираль Архимеда, многолистники. Вычисление площади криволинейного сектора.
3. Определение длины кривой. Нахождение производной от длины кривой. Вычисление длины кривой для параметрически заданных кривых. Формулы для длины кривой в декартовых и полярных координатах.
4. Тело вращения. Поверхность вращения. Примеры: сфера, параболоид. Вычисление объема тела вращения.
5. Поверхность вращения. Площадь поверхности усеченного конуса. Определение площади поверхности. Производная площади поверхности. Вычисление площади поверхности вращения.
6. Функции 2-х переменных. Определение частных приращений и частных производных. Полный дифференциал.

7. Определение касательной плоскости. Нормальный вектор касательной плоскости. Вывод формулы для касательной плоскости в естественной параметризации ($x=x$, $y=y$).
8. Определение точек локального максимума, локального минимума для функции 2-х переменных. Необходимое условие локального экстремума для дифференцируемой функции. Достаточное условие локального экстремума для функции 2-х переменных.
9. Определение дифференциального уравнения 1 порядка. Определения решения д.у., общего решения д.у., частного решения д.у. Задача Коши для ДУ 1-го порядка. Примеры дифференциальных уравнений в биологии. Методы решения д.у. с разделяющимися переменными и линейных д.у. 1-го порядка.
10. Д.У. высших порядков. Определение решения, общего решения, частного решения, задача Коши для Д.У. Линейный оператор. Понятие линейной зависимости (независимости) функций на множестве. Понятие ФСР для линейного ДУ. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородного ДУ. Теорема об общем решении неоднородного ДУ. (без док-ва). Метод вариации нахождения частного решения неоднородного ДУ 2-го порядка (вывод).
11. Комплексные числа. Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера нахождения ФСР и общего решения однородного ДУ. Подбор частного решения для неоднородного ДУ (метод неопределённых коэффициентов).
12. Числовые ряды. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Ряд геометрической прогрессии, гармонический ряд (их сходимость, расходимость). Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов (сравнения, Даламбера, Коши, интегральный).

Примеры задач:

1. Вычислить определитель:

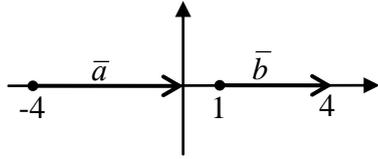
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Сколько решений имеет система:

$$\begin{cases} 3x + 9y + z = -2 \\ 6x + 3y - z = 23 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

3. Найдите координаты вектора \overline{AB} и его длину. В ответ напишите квадрат длины. Координаты точек: $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 0)$.

4. Найдите скалярное произведение векторов:



5. При каком значении m векторы ортогональны? $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$

6. Вычислите площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{a} = (3, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$. В ответ напишите площадь в квадрате.

7. Найдите сумму координат середины отрезка AB . Координаты точек: $A(3, 7, 9)$, $B(7, 9, 11)$.

8. Укажите номер прямой, на которой лежит точка $A(4, 5)$

- 1) $2x - 3y + 7 = 0$
- 2) $x + 2y = 4$
- 3) $2x + y = 1$

9. Найдите большую полуось эллипса $3x^2 + 25y^2 = 75$

10. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5}$

11. Вычислить производную от функции $f(x) = 10 + 3x - 2x^3$ в точке $x = 2$.

12. Найдите длину промежутка убывания функции $f(x) = 17 + x^3 - 3x$

13. Найдите абсциссу точки перегиба функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 15x$

14. Вычислите интеграл: $\int_0^1 (2 + 3x - 6x^5) dx$

15. Вычислите площадь области, ограниченной кривыми $y = \cos x$, $y = 0$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

16. Укажите номер функции, которая является общим членом ряда:

$$-1 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} + \frac{7}{16} + \dots$$

- 1) -1
- 2) 3.5
- 3) $\frac{7}{2^{n-1}}$

17. Укажите номер функции, которая является общим решением дифференциального уравнения $xy' - y = 10$

- 1) $y = 5x - 10$
- 2) $y = cx - 10$

3) $y = x + 10$

18. Вычислите интеграл $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} + \sqrt{x} \right) dx$

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

- Оценка "отлично" ставится за исчерпывающий, точный ответ, демонстрирующий хорошее знание теоретического материала, свободное владение математической терминологией, умение излагать материал последовательно, делать необходимые обобщения и выводы;
- Оценка "хорошо" ставится за ответ, обнаруживающий хорошее знание и понимание теоретического материала, умение излагать материал последовательно и грамотно. В ответе может быть недостаточно полно развернута аргументация, возможны отдельные недостатки в формулировке выводов.
- Оценка "удовлетворительно" ставится за ответ, в котором материал раскрыт в основном правильно, но недостаточно полно, с отклонениями от последовательности изложения. Математически строгие доказательства подменяются правдоподобными рассуждениями, нет полноценных обобщений и выводов.
- Оценка "неудовлетворительно" ставится, если ответ обнаруживает незнание теоретического материала и неумение его анализировать, в ответе отсутствуют необходимые математические примеры; нарушена логика в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест 1.

1. Вычислить определитель второго порядка.

2.
$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Найти длину вектора

$$\overline{AB} = \{-5; 12\}.$$

3. Вычислить производную

$$y = x^2 + 2x + 1$$

Ответы. 0; 13; $y' = 2x + 2$

Тест 2.

1. Вычислить определитель второго порядка.

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Найти длину вектора

$$\overline{AB} = \{6; 8\}.$$

3. Вычислить производную

$$y = x^3 + 4x + 1$$

Ответы. -2; 10; $y' = 3x^2 + 4$

Тест 3.

1. Вычислить определитель второго порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

2. . . .

Найти длину вектора

$$\overrightarrow{AB} = \{0; 8\}.$$

3. Вычислить производную

$$y = x^2 - 2x + 1$$

Ответы. 2; 8; $y' = 2x - 2$

Информация о разработчиках

Трофименко Надежда Николаевна, к.-т физ.-мат. наук, доцент, кафедра общей математики ММФ, доцент кафедры общей математики.