

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан
Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ

по направлению подготовки / специальности

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование

Форма обучения

Очная

Квалификация

Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Год приема

2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Задачи освоения дисциплины

Освоить основные понятия функционального анализа, изучить основные принципы функционального анализа, получить необходимые знания теории операторов в банаховых и гильбертовых пространствах для дальнейшего самостоятельного изучения математической литературы.

– Научиться использовать теоретические знания для решения интегральных и дифференциальных уравнений, задач о наилучшем приближении в конкретных пространствах, о характере сходимости последовательностей, о разложении в ряды Фурье, о нахождении спектра об исследовании свойств операторов и других практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Пятый семестр, экзамен

Шестой семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, топология, теория функций комплексного переменного.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 з.е., 360 часов, из которых:

-лекции: 80 ч.

-практические занятия: 80 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам:

Первый семестр

Тема 1 Общая теория меры.

1. Определения примеры.
2. Теорема Лебега о продолжении меры с полукольца на σ алгебру.
3. Регулярные меры.
4. Меры на прямой. Счетная аддитивность.
5. Обобщенные меры. Теорема Хана. Теорема Жордана.
6. Абсолютно непрерывные и сингулярные меры.
7. Теорема Лебега о разложении меры.
8. Теорема Радона-Никодима.

Тема2. Банаховы пространства.

1. Определения и основные свойства.
2. Непрерывные и линейные операторы и функционалы.
3. Основные принципы функционального анализа: теорема Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема об обратном операторе, теорема о замкнутом графике.
4. Конечномерные нормированные пространства.
5. Компактность в нормированных пространствах.
6. Вполне непрерывные и конечномерные операторы.
7. Сопряженные операторы.

Тема3. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.

1. Доказательство теоремы Стоуна-Вейерштрасса для вещественного и комплексного случая. Примеры всюду плотных алгебр в пространствах $C(K)$.

Второй семестр.

Тема 1. Гильбертовы пространства.

1. Определения и основные свойства.
2. Теорема о проекции.
3. Общий вид функционалов в гильбертовом пространстве.
4. Ряды Фурье.
5. Сопряженные и самосопряженные операторы.
6. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве.

Тема 2. Спектральная теория линейных ограниченных операторов.

1. Свойство спектра. Классификация спектра.
2. Спектральный радиус.
3. Теорема о полиномиальном отображении спектра.
4. Спектр самосопряженного оператора.
5. Спектр вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.
6. Уравнения Римма-Шаудера. Теоремы Фредгольма.
7. Теорема Гильберта-Шмидта.
8. Теорема о неподвижной точки и ее применения.

Тема 3. Неограниченные операторы.

1. Определения и примеры.
2. Замкнутые операторы.
3. Симметричные сопряженные и самосопряженные операторы.
4. Признак самосопряженности.
5. Спектр неограниченного оператора. Примеры.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки выполнения домашних заданий, проверки индивидуальных заданий и проведения коллоквиума. Фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Оценочные материалы текущего контроля размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в пятом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Экзаменационный билет содержит три вопроса: два теоретических и один практический. Ответ на первые два вопроса предполагает формулировки и доказательства и проверяет РООПК-1.1 и РООПК-1.2 Третий вопрос, проверяющий РООПК-1.3, предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Ответ на все три вопроса оценивается оценкой «отлично», ответ на два вопроса – оценкой «хорошо», Решение задачи и формулировки теорем без доказательства или ответ на один теоретический вопрос с доказательством, а второй без доказательства – «удовлетворительно». В остальных случаях оценка выставляется в зависимости от ответов на дополнительные вопросы.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

Перечень теоретических вопросов

1. Нормированные пространства. Свойства.
2. Неравенства Гёльдера и Минковского.
3. Примеры банаховых и небанаховых нормированных пространств.
4. Сепарабельность. Примеры сепарабельных и несепарабельных нормированных пространств.
5. Линейные операторы. Теорема о равносильности непрерывности и ограниченности. Следствия.
6. Примеры линейных ограниченных и неограниченных операторов.
7. Пространство $L(E, F)$. Теорема о полноте.
8. Плотные и нигде не плотные множества. Примеры. Теорема Бэра. Пример нормированного пространства, равного объединению счётного числа нигде не плотных множеств.

9. Поточечная и равномерная ограниченность операторов. Примеры. Принцип равномерной ограниченности.
10. Теоремы о поточечной сходимости последовательности операторов. Связь с равномерной сходимостью. Примеры.
11. Линейные ограниченные функционалы. Примеры линейных ограниченных и неограниченных функционалов.
12. Теорема Хана-Банаха (аналитическая форма), для комплексного случая, для нормированных пространств. Следствия 1-8.
13. Конечномерные нормированные пространства. Изоморфизм всех нормированных пространств одной размерности. Следствия.
14. Компактность единичного шара в конечномерных пространствах и некомпактность в бесконечномерных пространствах. Теорема о почти перпендикуляре. Примеры в l_p , C_0 , $C[a,b]$, $L_p(a,b)$.
15. Выпуклые функционалы. Свойства функционала Минковского.
16. Теорема о разделении выпуклых множеств.
17. Теорема о строгом разделении выпуклых множеств.
18. Связь между линейными функционалами и гиперплоскостями. Примеры гиперплоскостей и подпространств, не являющихся гиперплоскостями.
19. Выпуклые и идеально выпуклые множества. Свойства, примеры. Теорема о замкнутых выпуклых множествах в банаховом пространстве.
20. Внутренние и радиально внутренние точки. Примеры. Теорема о радиально внутренней точке $x=0$.
21. Доказательство включения $\text{rint } \bar{A} \subset \text{int } \bar{A}$ для идеально выпуклого множества A в банаховом пространстве.
22. Доказательство включения $\text{int } \bar{A} \subset \text{int } A$ для идеально выпуклого множества A в банаховом пространстве.
23. Принцип открытости отображения.
24. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
25. Относительная компактность. Теоремы Хаусдорфа и Арцела-Асколи.
26. Вполне непрерывные операторы. Примеры. Вполне непрерывность суммы, умножения на число, композиции и предельного оператора. Вполне непрерывность оператора Фредгольма.
27. . Вполне непрерывность сопряжённого оператора.
28. Естественная изометрия. Рефлексивные пространства. Примеры. Рефлексивность замкнутого подпространства. Признак неограниченности множества в нормированном пространстве
29. Теорема Лебега о продолжении меры с полукольца на σ алгебру.
30. Регулярные меры.
31. Меры на прямой. Счетная аддитивность.
32. Обобщенные меры. Теорема Хана. Теорема Жордана.
33. Абсолютно непрерывные и сингулярные меры.
34. Теорема Лебега о разложении меры.
35. Теорема Радона-Никодима.

Примеры задач:

1. Исследовать последовательность функций $x_n(t) = \frac{nt}{n^2 t^2 + 1}$ на сходимость в пространствах $C[-1,1]$, $\mathcal{L}_1(-1,1)$, $\mathcal{L}_2(-1,1)$.
2. Исследовать последовательность функций $x_n(t) = e^{-nt}$ на

3. Исследовать последовательность функций $x_n(t) = e^{-\frac{t}{t+n+1}}$ на сходимость в пространствах $C[-1,1]$, $\mathcal{L}_1(-1,1)$, $\mathcal{L}_2(-1,1)$.
4. Является ли ограниченным функционал $f(x) = x(0) - \int_{-1}^1 x(t) dt$ на пространстве $C[-1,1]$. Найти его норму.
5. Является ли ограниченным функционал $f(x) = \int_{-1}^1 t \operatorname{sgn} x(t) dt$ на пространстве $\mathcal{L}_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти его норму. (в случае ограниченности)
6. Является ли ограниченным функционал $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$ в пространствах ℓ_1, ℓ_2 . Найти норму (в случае ограниченности).
7. Является ли ограниченным функционал $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos \frac{1}{n}$ в пространствах ℓ_1, ℓ_2 . Найти норму (в случае ограниченности)
8. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ – линейное подпространство $L = \{(x, y): y - 2x = 0\}$. Продолжить функционал $f(x) = x + y$ с подпространства L на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.
9. Является ли данное подпространство $L \subset E$
Замкнутым линейным подпространством, Гиперплоскостью
 1. а). $L = \{x \in C[0,1]: \int_0^1 tx(t) dt = 0\}$
 2. $L = \{x \in C[-1,1]: x(-1) = x(1)\}$
 3. Множество чётных функций в пространстве $C[-1,1]$
 4. Множество всех полиномов в пространстве $C[0,1]$
 5. Множество всех непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $C[0,1]$
 6. $L = \{x \in C[0,1]: x(0) + x(1) = 0\}$
9. Проверить, является ли оператор $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$
 - (а) Нормальным, унитарным, самосопряженным, положительным, проектором?
 - (б) Найти норму оператора T .
 1. $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ $T(x_1, x_2) = (-2x_1 - x_2, -2x_2 - x_1)$.
 2. $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ $T(x_1, x_2) = (\sqrt{2}x_2, \sqrt{2}x_1 + x_2)$.
 3. $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ $T(x_1, x_2) = (5x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2)$
 4. $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_2, 2x_2 - 2x_3, -2x_2 + 2x_3)$
 5. $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_3, -x_2)$.
10. Найти норму оператора $T: \mathcal{L}_2(-1,1) \rightarrow \mathcal{L}_1(-1,1)$, $Tx(t) = tx(t)$.
11. Найти норму оператора $T: \mathcal{L}_2(-1,1) \rightarrow \mathcal{L}_1(-1,1)$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sqrt[4]{t}}$

11. Исследовать относительную компактность множества

$A \subset C[0,1]$, где A – множество непрерывно дифференцируемых функций, таких, что $|x'(t)| \leq K$ для всех $t \in [0,1]$ и уравнение $x(t)=0$ имеет хотя бы один корень на промежутке $[0,1]$.

12. Является ли относительно компактным равномерно ограниченное множество многочленов второй степени в пространстве $C[0,1]$.

13. Является ли относительно компактным множество $\{x \in \ell_2 : |x_n| \leq \frac{1}{2}\}$ в пространстве ℓ_2 .

14. Является ли относительно компактным множество $\{x \in \ell_2 : |x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ в пространстве ℓ_2 .

15. Является ли вполне непрерывным оператор $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$
 $Tx(t) = x(0) + t^2 x(1)$

16. Является ли вполне непрерывным оператор $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$
 $Tx(t) = (t^2 - t)x(t)$

17. Является ли вполне непрерывным оператор
 $Tx(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$ в пространстве $C[-1,1]$

18. Является ли вполне непрерывным оператор $Tx(t) = x(t^2)$ в пространстве $C[-1,1]$.

19.

Найдите скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ векторов $x = (i, -1, 3+i, 3)$ и $y = (i, -2, -i, i)$ в пространстве J^4 .

20.

Найдите все собственные векторы оператора $T: J^4 \otimes J^4$, заданного формулой $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 2x_2 + x_4, 0, 0)$.

21.

Найдите все собственные векторы оператора $T: L_2(-1,1) \rightarrow L_2(-1,1)$, заданного

формулой $Tx(t) = \int_{-1}^1 (3ts + 5t^2 s^2)x(s) ds$.

22. Применяя формулы Гильберта-Шмидта, решите уравнение Фредгольма

$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t)$ для каждого из данных значений μ .

№	μ	$[a,b]$	$K(t,s)$	$f(t)$
1	$\{1, \frac{1}{4}, \frac{9}{4}\}$	$[0, \pi]$	$\begin{cases} t, & \text{если } t \leq s \\ s, & \text{если } t \geq s \end{cases}$	$\sin 2t \cos \frac{t}{2}$
2	$\{2, -\frac{1}{4}, -\frac{25}{4}\}$	$[-\pi, 0]$	$\begin{cases} s, & \text{если } t \leq s \\ t, & \text{если } t \geq s \end{cases}$	$\sin \frac{t}{2}$

20. Решить уравнение Фредгольма методом дифференцирования.

$$1. \quad x(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds = te^t, \text{ где } K(t,s) = \begin{cases} \frac{sh t \cdot sh(s-1)}{sh 1}, & \text{если } t \leq s \\ \frac{sh s \cdot sh(t-1)}{sh 1}, & \text{если } t \geq s \end{cases}$$

$$2. \quad x(t) = \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(t,s)x(s)ds + \frac{t}{2}, \text{ где } K(t,s) = \begin{cases} t(1-\frac{s}{2}), & \text{если } t \leq s \\ s(1-\frac{t}{2}), & \text{если } t \geq s \end{cases}$$

23. Решить уравнение Вольтерра.

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(s)$$

	$K(t,s)$	$f(t)$	μ
1	e^{t-s}	$\sin t$	-2
2	$e^{t^2-s^2}$	e^{t^2+2t}	2
3	e^{t-s}	$\sin t$	-1

24. Является ли $D(T)$ плотным линейным подпространством в H . Является ли оператор T неограниченным.

a)

$$H = L_2(0, \frac{\pi}{2}), \quad Tx(t) = \frac{x(t)}{\sin t}$$

$$D(T) = \{x \in L_2(0, \frac{\pi}{2}) : \frac{x(t)}{\sin t} \in L_2(0, \frac{\pi}{2})\}$$

b)

$$H = \ell_2, \quad T(x_1, x_2, \dots, x_n \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n \dots)$$

$$D(T) = \{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n| < \infty\}$$

c)

$$H = \ell_2, \quad T((x_1, x_2, \dots, x_n \dots)) = (x_1, \sqrt{2}x_2, \dots, \sqrt{n}x_n \dots)$$

$$D(T) = \{x \in \ell_2 : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ такое что } x_n = 0 \text{ при всех } n > n_0\}$$

25. Является ли оператор T симметричным, самосопряжённым. Найдите T^* и $D(T^*)$.

a)

$$H = L_2(0,1), \quad Tx(t) = \frac{x(t)}{t^2}$$

$$D(T) = \{x \in L_2(0,1) : \frac{x(t)}{t^2} \in L_2(0,1)\}$$

b)

$$H = \ell_2, \quad T(x_1, x_2, \dots, x_n \dots) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots x_n \dots)$$

$$D(T) = \{x \in \ell_2 : (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots x_n \dots) \in \ell_2\}$$

c)

$$H = \mathcal{L}_2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad T(bcost + a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = bcost$$

$$D(T) = \{ bcost + a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n : n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \}$$

26. Найдите $\sigma(T)$.

a)

$$H = \mathcal{L}_2(0, \infty), \quad Tx(t) = tx(t)$$

$$D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0, \infty) : x(t)e^t \in \mathcal{L}_2(0, \infty)\}$$

b)

$$H = \ell_2, T(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

$$D(T) = \{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty\}$$

c)

$$H = \ell_2, T(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} x_{kn}, \dots)$$

$$D(T) = \{x \in \ell_2 : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ такое что } x_n = 0 \text{ при всех } n > n_0\}$$

11. Учебно-методическое обеспечение

a) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «IDo»:

5й семестр – <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=8872>

6й семестр – <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=13799>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План практических занятий по дисциплине.

г) Методические указания по выполнению индивидуальных заданий.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

a) основная литература:

1. Колмогоров А.В., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физматлит, 2009, 572 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Функциональный анализ. Санкт-Петербург, «Лань», 2009, 272 с.
3. Филимонова Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 176 с.
4. Сергеев А.Г. Лекции по функциональному анализу. М.: МИАН. 2013. 100 с
5. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу. Москва: Вузовская книга, 2007. 431 с.
6. Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. - 82 с.
7. Основы теории меры Т.1 - Богачев В.И. - 2003

б) дополнительная литература

1. Власова Е.А., Марчевский К.А. Элементы функционального анализа. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 400 с.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ и его применение. – М.: Наука, 1980.
3. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.

4. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.
5. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- открытые онлайн-курсы
- Официальный сайт Всемирного банка - www.worldbank.org
- Общероссийская Сеть КонсультантПлюс Справочная правовая система.
<http://www.consultant.ru>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

–

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –
<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и теории функций.