

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан

Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Теория множеств

по направлениям подготовки / специальностям

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленности (профили) подготовки/ специализации:

Современная математика и математическое моделирование

Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения

Очная

Квалификации

Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь

Математик-вычислитель

Год приема

2025

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л.В. Гензе

Председатель УМК

Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

ООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

ООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– две контрольные работы;

Контрольная работа (ИУК 1.1, ИПК-3.3)

Контрольная работа состоит из одного теоретического вопроса и 2 задач.

Перечень теоретических вопросов к первой контрольной работе:

1. Опишите основные операции над множествами. Приведите примеры.
2. Формулы двойственности де Моргана. Докажите одну из них.
3. Верхний и нижний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств. Примеры.
4. Докажите, что объединение двух счетных множеств счетно.
5. Докажите, что объединение счетного семейства счетных множеств счетно.
6. Докажите, что в каждом бесконечном множестве есть бесконечное подмножество.
7. Докажите, что декартово произведение двух счетных множеств счетно.
8. Докажите, что декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно. Используйте метод математической индукции.
9. Доказать, что множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ счетны.
10. Доказать, что множества $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ счетны.
11. Докажите, что множество всех алгебраических чисел счетно.
12. Доказать, что $(0,1)$ не является счетным.
13. Какие множества называются равномошными? Приведите примеры равномошных и неравномошных множеств.
14. Как определяется отношение «Мощность множества A не превосходит мощности множества B »? Какими свойствами оно обладает? Докажите его транзитивность.
15. Теорема Кантора-Бернштейна. Сформулируйте и докажите.
16. Докажите равномошность двух сегментов на прямой.
17. Докажите равномошность множеств $[0,1)$ и $(0,1)$.
18. Докажите равномошность множеств $(0,1)$ и $(0, +\infty)$.
19. Докажите, что объединение счетного числа множеств мощности континуум имеет мощность континуум.
20. Докажите, что отрезок $(0,1)$ равномошен квадрату $(0,1) \times (0,1)$.
21. Теорема Кантора (общая формулировка): сформулировать и доказать.
22. Докажите, что множество последовательностей, состоящих из нуля и единицы несчетно.
23. Множество Кантора и его свойства.

Примеры задач:

1. Доказать, что любое семейство попарно не пересекающихся кругов на плоскости не более чем счетно.
2. Равномощны ли квадрат и круг на плоскости? Ответ подробно поясните.
3. Доказать, что любое семейство попарно не пересекающихся шаров в $\mathbb{R}^3$ не более чем счетно.
4. Доказать, что график функции $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуума.
5. Доказать, что квадрат на плоскости имеет мощность континуума.

Перечень теоретических вопросов ко второй контрольной работе:

1. Отношения на множестве. Типы отношений. Привести примеры.
2. Отношение порядка. Линейный порядок. Полный порядок. Привести примеры частично упорядоченных, линейно упорядоченных и вполне упорядоченных множеств.
3. Вполне упорядоченные множества. Как связаны линейно упорядоченные и вполне упорядоченные множества? Ответ подробно поясните. Приведите примеры.
4. Трансфинитная индукция. Сформулируйте и докажите теорему о ней. Приведите пример применения.
5. Отношение эквивалентности. Разбиение множества на классы эквивалентности. Приведите примеры.
6. Теорема о разбиении множества на классы эквивалентности с помощью отношения эквивалентности. Сформулируйте и докажите ее..
7. Докажите, что в любом промежутке ненулевой длины на прямой есть множество, длину которого нельзя определить (множество Витали).
8. Вполне упорядоченные множества. Приведите определение, опишите структуру. Всегда ли во вполне упорядоченном множестве есть максимальный элемент?
9. Что такое начальный отрезок линейно упорядоченного множества? Приведите примеры различных числовых множеств и начальных отрезков в них, опишите их общий вид. Являются ли начальные отрезки вполне упорядоченными по включению?
10. Свойства начальных отрезков. Сформулировать и доказать.
11. Что такое изоморфизм? Приведите примеры изоморфных и неизоморфных множеств.
12. Что такое автоморфизм? Приведите примеры автоморфизмов.
13. Парадокс Кантора. в чем он состоит и почему возник? Какую аксиому нужно принять, чтобы он не возникал?
14. Парадокс Рассела. В чем он состоит и почему возник? Какую аксиому нужно принять, чтобы он не возникал?
15. Аксиоматика Цермело-Френкеля. В чем она состоит и почему появилась?
16. Аксиома выбора. Приведите примеры ее использования в доказательствах курсов математического анализа, алгебры, теории множеств.
17. Две формулировки аксиомы выбора. Докажите теорему об их эквивалентности.
18. Теорема Цермело. Сформулировать и доказать.
19. Лемма Цорна. Сформулировать и доказать. Привести примеры использования.
20. Классы подмножеств: полукольцо, кольцо, алгебра, сигма-алгебра. Сформулировать определения, привести примеры.
21. Борелевская сигма-алгебра. Дать определение, описать борелевские сигма-алгебры на прямой и плоскости.

Примеры задач:

1. Изоморфны ли множества иррациональных чисел из промежутка $[1, 4)$ и множество иррациональных чисел из промежутка $(11, 34)$? Докажите.
2. Является ли отношение «быть изоморфным» отношением порядка? Отношением эквивалентности? Ответ подробно поясните.
3. Является ли сигма-алгеброй семейство множеств, симметричных относительно нуля на прямой?

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные и подробные ответы на все теоретические вопросы и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны в основном правильные ответы с несущественными недочетами, которые легко устранить, объяснив и дополнив ответ на консультации, либо даны в основном правильные, но неполные и неподробные ответы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны в основном правильные ответы хотя бы на два вопроса.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется во всех остальных случаях

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Если студент в течение семестра написал обе контрольные работы суммарно не менее, чем на 7 баллов, не имеет пропусков и имеет конспект лекций, то он получает зачет по курсу. Иначе студент сдает зачет по билетам.

Билет на зачет состоит из трех вопросов, первые два из которых проверяют, проверяющих РООПК-1, ответ на них дается в развернутой форме. Третий вопрос, проверяющий РООПК-1.2 и РООПК-1.3 предполагает решение задачи.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-2.2. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИПК-3.3 и оформленные в виде практических задач. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов:

1. Опишите основные операции над множествами. Приведите примеры. Формулы двойственности де Моргана. Докажите одну из них.
2. Верхний и нижний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств. Примеры.
3. Докажите, что объединение двух счетных множеств счетно.
4. Докажите, что объединение счетного семейства счетных множеств счетно.
5. Докажите, что в каждом бесконечном множестве есть бесконечное подмножество.
6. Докажите, что декартово произведение двух счетных множеств счетно.
7. Докажите, что декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно. Используйте метод математической индукции.
8. Доказать, что множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ счетны.
9. Доказать, что множества $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ счетны.
10. Докажите, что множество всех алгебраических чисел счетно.
11. Доказать, что $(0,1)$ не является счетным.

12. Какие множества называются равномошными? Приведите примеры равномошных и неравномошных множеств.
13. Как определяется отношение «Мощность множества A не превосходит мощности множества B »? Какими свойствами оно обладает? Докажите его транзитивность.
14. Теорема Кантора-Бернштейна. Сформулируйте и докажите.
15. Докажите равномошность двух сегментов на прямой.
16. Докажите равномошность множеств $[0,1)$ и $(0,1)$.
17. Докажите равномошность множеств $(0,1)$ и $(0, +\infty)$.
18. Докажите, что объединение счетного числа множеств мощности континуум имеет мощность континуум.
19. Докажите, что отрезок $(0,1)$ равномошен квадрату $(0,1) \times (0,1)$.
20. Теорема Кантора (общая формулировка): сформулировать и доказать.
21. Докажите, что множество последовательностей, состоящих из нуля и единицы несчетно.
22. Множество Кантора и его свойства.
23. Отношения на множестве. Типы отношений. Привести примеры.
24. Отношение порядка. Линейный порядок. Полный порядок. Привести примеры частично упорядоченных, линейно упорядоченных и вполне упорядоченных множеств.
25. Вполне упорядоченные множества. Как связаны линейно упорядоченные и вполне упорядоченные множества? Ответ подробно поясните. Приведите примеры.
26. Трансфинитная индукция. Сформулируйте и докажите теорему о ней. Приведите пример применения.
27. Отношение эквивалентности. Разбиение множества на классы эквивалентности. Приведите примеры.
28. Теорема о разбиении множества на классы эквивалентности с помощью отношения эквивалентности. Сформулируйте и докажите ее.
29. Докажите, что в любом промежутке ненулевой длины на прямой есть множество, длину которого нельзя определить (множество Витали).
30. Вполне упорядоченные множества. Приведите определение, опишите структуру. Всегда ли во вполне упорядоченном множестве есть максимальный элемент?
31. Что такое начальный отрезок линейно упорядоченного множества? Приведите примеры различных числовых множеств и начальных отрезков в них, опишите их общий вид. Являются ли начальные отрезки вполне упорядоченными по включению?
32. Свойства начальных отрезков. Сформулировать и доказать.
33. Что такое изоморфизм? Приведите примеры изоморфных и неизоморфных множеств.
34. Что такое автоморфизм? Приведите примеры автоморфизмов.
35. Парадокс Кантора. В чем он состоит и почему возник? Какую аксиому нужно принять, чтобы он не возникал?
36. Парадокс Рассела. В чем он состоит и почему возник? Какую аксиому нужно принять, чтобы он не возникал?
37. Аксиоматика Цермело-Френкеля. В чем она состоит и почему появилась?
38. Аксиома выбора. Приведите примеры ее использования в доказательствах курсов математического анализа, алгебры, теории множеств.
39. Две формулировки аксиомы выбора. Докажите теорему об их эквивалентности.
40. Теорема Цермело. Сформулировать и доказать.
41. Лемма Цорна. Сформулировать и доказать. Привести примеры использования.

42. Классы подмножеств: полукольцо, кольцо, алгебра, сигма-алгебра.

Сформулировать определения, привести примеры.

43. Борелевская сигма-алгебра. Дать определение, описать борелевские сигма-алгебры на прямой и плоскости.

Критерии оценивания:

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «незачтено»,

Оценка «зачтено» выставляется, если даны в основном правильные ответы на все вопросы, задача решена без существенных ошибок.

Оценка «незачтено» выставляется, во всех остальных случаях.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Вопросы:

1. Является ли множество рациональных чисел счетным?
2. Приведите формулировку аксиомы выбора. Какие утверждения ей эквивалентны?
3. Отношения эквивалентности. Сформулируйте понятия, приведите примеры.
4. Отношения порядка. Сформулируйте понятия. Приведите примеры.
5. Что такое линейный порядок?
6. Является ли множество вещественных чисел счетным?
7. Счетно ли объединение двух счетных множеств?
8. Является ли несчетным объединение несчетных множеств?
9. Является ли декартово произведение двух счётных множеств счетным?
10. Что такое изоморфизм?

Информация о разработчиках

Емельянова Татьяна Вениаминовна, к.ф.-м.н., кафедра математического анализа и теории функций, доцент.