Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Алгебра

по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки:
Современная математика и математическое моделирование
Теоретическая, вычислительная и экспериментальная механика
Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности
Результатами освоения дисциплины являются следующие:
РООПК - 1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости
РООПК - 1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики
РООПК - 1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:
– контрольные работы.

1й семестр

Контрольная работа №1 (РООПК 1.2, РООПК 1.3)
Примеры задач:
1) Решить матричное уравнение

$$X \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

3) Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы:
1) $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
2) 216
3) 4

Контрольная работа №2 (РООПК 1.2, РООПК 1.3)
Примеры задач:

1) Исследуйте систему и, если это возможно, найдите общее решение:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2,$$
$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23,$$
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12.$$

2) Исследуйте однородную систему и найдите её общее решение:

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0,$$
$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$$
$$4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0,$$
$$7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0.$$

Ответы:

1) $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$ (одна из возможных записей общего решения)

2) $x_1 = \frac{3x_3 - 13x_4}{17}$, $x_2 = \frac{19x_3 - 20x_4}{17}$ (одна из возможных записей общего решения)

Контрольная работа №3 (РООПК 1.2, РООПК 1.3)

Примеры задач:

1) Найдите все делители нуля, обратимые элементы, идемпотенты, нильпотенты в кольце классов вычетов $\mathbf{Z}_9$.

2) Будет ли множество $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ подполем поля всех вещественных чисел **R**?

3) Какими из свойств (коммутативность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента, наличие симметричного элемента для каждого элемента группоида) обладает группоид ($\mathbf{R}$, $*$), где $a*b = |ab|$?

Ответы:

1) Нетривиальные делители нуля $\bar{3}$ и $\bar{6}$, обратимые элементы $\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}$, нетривиальных идемпотентов нет, нетривиальные нильпотенты $\bar{3}$ и $\bar{6}$

2) Да

3) Коммутативность, ассоциативность

Контрольная работа №4 (РООПК 1.2, РООПК 1.3)

Примеры задач:

1) Вычислите выражение $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

2) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1 - 2i \end{cases}$

3) Найдите тригонометрическую форму числа $\sqrt{3} - i$.

4) Вычислите выражение $(2 - \sqrt{3} + i)^{12}$.

5) Вычислите выражение $\sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)}$.

Ответы:

1) 2

2) $z_1 = ((2 + i)z_2 - i)/2$

3) $2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$

4) $-2^{12}(2 - \sqrt{3})^6$

5) $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

2й семестр

Контрольная работа №1 (РООПК 1.2, РООПК1.3)

Примеры задач:

1) Выполнить деление с остатком $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$.

2) При каком условии многочлен $x^3 + px + q$ делится на многочлен $x^2 + mx - 1$?

3) Выполнить деление с остатком $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$.

4) Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$, если $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ и $x_0 = 4$.

5) Определить кратность корня 2 для полинома $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Ответы:

1) Неполное частное $2x^2 + 3x + 11$, остаток $25x - 5$

2) $q = m$, $p = -m^2 - 1$

3) частное $4x^2 - (3 + 4i)x + (-1 + 7i)$, остаток $8 - 6i$

4) 136

5) 3

Контрольная работа №2 (РООПК 1.2, РООПК 1.3)

Примеры задач:

1) Пусть векторы e_1, e_2, e_3 и x заданы своими координатами в каком-либо базисе: $e_1 = (1 ,1 ,1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$. Докажите, что e_1, e_2, e_3 – также базис пространства, и найдите координаты вектора x в этом базисе.

2) Найдите базисы суммы и пересечения линейных оболочек следующих систем векторов: $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 3, 3)$, $b_1 = (1, 2, 2)$, $b_2 = (2, 3, -1)$, $b_3 = (1, 1, -3)$.

Ответы:

1) (1, 2, 3)

2) Базис суммы – например, a_1, a_2, b_1; базис пересечения – например, вектор (3,5,1)

Контрольная работа №3 (РООПК 1.2, РООПК 1.3)

Примеры задач:

1) Линейный оператор в пространстве вещественных многочленов степени < 3 имеет в базисе $(1, x, x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $(3x^2 + 2x + 1, x^2 + 3x + 2, 2x^2 + x + 3)$.

2) Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Является ли линейный оператор, имеющий матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ в некотором базисе, диагонализируемым? Если да, то найдите подходящий базис и соответствующую ему диагональную матрицу.

Ответы:

1) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; собственные векторы имеют вид $c_1(1, 2, 0)+c_2(0, 0, 1)$, где c_1 и c_2 не равны 0 одновременно

3) Является. Подходящий базис: (1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, –3), в нём оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Результаты контрольных работ определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

Оценка	Критерии соответствия
Отлично	$>90\%$ заданий выполнено правильно
Хорошо	70% – 90% заданий выполнено правильно
Удовлетворительно	50% – 70% заданий выполнено правильно
Неудовлетворительно	$<50\%$ заданий выполнено правильно

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Первая часть экзамена в первом и втором семестрах проводится по билетам в письменной форме с устной защитой. Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов, проверяющих РООПК 1.1 и РООПК 1.3.

Вторая часть экзамена представляет собой беседу со студентом, в которой проверяется знание основных формулировок теорем и определений (РООПК 1.1, РООПК 1.3) и умение решения типовых задач (РООПК 1.2).

Перечень теоретических вопросов

1-й семестр

1. Деление целых чисел с остатком. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Простые числа и их свойства. Теорема Евклида (с доказательством). Основная теорема арифметики.
2. Перестановки и подстановки. Теорема об изменении чётности перестановки при транспозиции.
3. Понятие матрицы. Сложение и умножение матриц, их свойства. Транспонирование матриц.
4. Определители матриц и их свойства.
5. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
6. Теорема Лапласа и следствия из неё.
7. Теорема об определителе произведения двух матриц.
8. Теорема об обратной матрице. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
9. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
10. Ранг систем вектор-строк и вектор-столбцов. Теорема о ранге матрицы (без доказательства).
11. Алгоритм нахождения ранга матрицы через миноры. Критерий равенства определителя нулю.
12. Элементарные преобразования матриц и их связь с рангом матрицы (без доказательств).
13. Ступенчатые и псевдоступенчатые матрицы, их свойства.
14. Критерий эквивалентности матрицы единичной матрице.
15. Теорема Крамера и формулы Крамера.
16. Теорема Кронекера – Капелли. Решение произвольной системы линейных уравнений, алгоритм решения.
17. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
18. Теорема о количестве линейно независимых решений однородной системы, алгоритм решения такой системы. Фундаментальная система решений.

19. Бинарные алгебраические операции. Коммутативность и ассоциативность операций. Теорема о расстановке скобок в полугруппе.

20. Нейтральный и симметричный элементы в группоидах, их единственность.

21. Группы и подгруппы, примеры. Критерий подгруппы.

22. Симметрическая группа и знакопеременная группа.

23. Симметрии правильных n-угольников. Группа диэдра.

24. Группы матриц. Полная линейная группа, специальная линейная группа.

25. Кольца и подкольца, примеры. Свойства операций в кольцах. Критерий подкольца (без доказательства).

26. Делители нуля и обратимые элементы в кольцах, примеры. Теорема о связи между обратимыми элементами и неделителями нуля.

27. Теорема о мультипликативной группе кольца. Примеры мультипликативных групп колец.

28. Кольца матриц. Мультипликативная группа кольца матриц.

29. Построение кольца вычетов $\mathbf{Z}_n$. Теорема об обратимых элементах кольца $\mathbf{Z}_n$.

30. Поля, примеры полей. Отличия поля от кольца. Теорема о конечных коммутативных кольцах с единицей без делителей нуля.

31. Подполе, примеры подполей. Критерий подполя.

32. Простые поля. Простота полей $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Z}_p$. Теорема о существовании простого подполя.

33. Изоморфизмы групп и колец, примеры. Образы нейтрального и симметричного элементов при изоморфизме.

34. Построение поля комплексных чисел. Поле комплексных чисел как расширение поля $\mathbf{R}$, содержащее корень уравнения $x^2+1=0$.

35. Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент. Тригонометрическая форма комплексного числа.

36. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.

37. Извлечение корня из комплексного числа.

38. Корни n-й степени из единицы. Теорема о группе корней U_n.

39. Первообразные корни. Теорема о первообразных корнях.

40. Единственность поля комплексных чисел.

2-й семестр

1. Теорема о делении многочлена с остатком. Свойства делимости многочленов.

2. Наибольший общий делитель двух многочленов, теорема о его существовании.

3. Теорема о представимости наибольшего общего делителя многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в виде $f(x)u(x)+g(x)v(x)$.

4. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты. Свойства взаимно простых многочленов.

5. Неприводимые и приводимые многочлены. Свойства неприводимых многочленов. Примеры таких многочленов над разными полями.

6. Основная теорема о разложении многочлена на множители.

7. Корни многочленов. Теорема Безу и следствия из неё.

8. Кратные корни многочлена. Теорема о понижении кратности корня при переходе к производной, следствие из этой теоремы.

9. Основная теорема алгебры многочленов и следствия из неё.

10. Теорема о невещественных корнях многочленов с вещественными коэффициентами. Неприводимость многочленов над полями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$.

11. Определение линейного пространства. Примеры. Свойства операций в линейном пространстве.

12. Линейная зависимость и независимость векторов. Критерии линейной зависимости и линейной независимости.

13. Теорема о замене и следствие из неё.

14. Базисы и размерность пространства. Доказать, что все базисы содержат одно и то же число векторов.

15. Примеры базисов в конкретных пространствах.

16. Теорема о выражении векторов через базис. Координаты векторов. Примеры координат.

17. Теорема о продолжении базиса и следствие из неё.

18. Изоморфизм линейных пространств. Теорема об изоморфизме пространству векторов-строк.

19. Теорема об изоморфизме линейных пространств.

20. Определение подпространства. Примеры. Критерий подпространства. Построение подпространств с помощью линейных оболочек.

21. Пересечение и сумма подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.

22. Операторы линейных пространств. Примеры. Теорема о существовании достаточного числа операторов.

23. Связи между двумя базисами и между координатами одного вектора в этих базисах.

24. Матрица оператора, примеры. Выражение координат вектора $f(x)$ через матрицу A оператора f.

25. Теорема о связи между матрицами оператора в различных базисах. Подобные матрицы.

26. Образ и ядро оператора. Ранг и дефект. Теорема о сумме ранга и дефекта оператора.

27. Сумма и произведение операторов. Кольцо операторов $E(V)$. Теорема об изоморфизме кольца операторов $E(V)$ и кольца матриц $M(n, F)$.

28. Понятие алгебры над полем. Определение изоморфизма алгебр. Теорема об изоморфизме алгебры операторов $E(V)$ и алгебры матриц $M(n, F)$.

29. Мультипликативная группа кольца. Определение обратимого оператора. Теорема об изоморфизме групп $U(E(V))$ и $GL(n, F)$.

30. Теорема об обратимых операторах (критерии обратимости оператора).

31. Собственные векторы и собственные значения оператора. Примеры. Собственные подпространства. Предложение о линейной независимости собственных векторов.

32. Характеристическая матрица оператора. Характеристический многочлен, его независимость от выбора базиса. Спектр оператора и его инвариантность. Теорема о совпадении собственных значений и характеристических корней.

33. Алгоритмы нахождения собственных значений и собственных векторов оператора. Пример.

34. Диагонализируемые операторы. Критерий диагонализируемости на языке собственных векторов.

35. Критерий диагонализируемости оператора на языке кратностей его характеристических корней.

36. Инвариантные подпространства, примеры. Связь между наличием инвариантных подпространств и клеточными треугольными и диагональными матрицами.

37. Индуцированный оператор на инвариантном подпространстве. Теорема о характеристическом многочлене такого оператора.

Примеры задач

1-й семестр

1. Найти $(i-1)^{471}$.

2-й семестр

1. Найти все рациональные корни многочлена $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

Критерии оценивания результатов обучения			
Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Студент не владеет навыками поиска учебной литературы, имеет пробелы в знании основного учебного материала, допускает принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой практических заданий и не может продолжить обучение без дополнительных занятий по дисциплине.	Студент допускает существенные погрешности в ответе на экзамене, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.	Студент обнаруживает хорошее знание учебного материала, успешно выполняет большинство предусмотренных программой практических заданий и знаком с основной учебной литературой, а также способен к дальнейшему пополнению и обновлению своих знаний под руководством преподавателя.	Студент обнаруживает всестороннее и систематическое знание учебного материала, успешно выполняет предусмотренные программой практические задания, а также способен к дальнейшему самостоятельному пополнению и обновлению своих знаний.

Указанная в таблице оценка может быть снижена на один балл, если средняя оценка студента за контрольные работы семестра не превышает «удовлетворительно».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи (РООПК 1.1, РООПК 1.2, РООПК 1.3):

1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Выясните, с каким знаком входит в определитель соответствующего порядка выражение $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{57}a_{64}a_{76}$.

3. Найдите все рациональные корни многочлена $4x^4 - 15x^2 + 13x - 3$.

4. Постройте многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами, имеющий двойной корень 1 и простой корень $2 - i$.

Ответы:

1. –38
2. Минус
3. 1/2
4. $a(x-1)^2(x-2+i) = a[x^3 + (-4+i)x^2 + (5-2i)x + (-2+i)]$ (например, при $a = 1$)

Информация о разработчиках

Тимошенко Егор Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры, профессор

Чехлов Андрей Ростиславович, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры, профессор

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович, кандидат физико-математических наук, кафедра алгебры, доцент