Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

по направлению подготовки

09.03.02 Информационные системы и технологии

Направленность (профиль) подготовки:
«Цифровая физика: анализ данных физики высоких энергий и моделирование сложных систем»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
И.А. Конов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-1 – Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

– ИОПК-1.1. – Обладает необходимыми естественнонаучными и общеинженерными знаниями для исследования информационных систем и их компонент;

– ИОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических, естественных и общеинженерных наук в профессиональной деятельности.

– ИОПК-1.3. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических, естественных и общеинженерных наук для моделирования и анализа задач

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить методы решения систем Линейных алгебраических уравнений и задач Аналитической геометрии.

– Научиться применять полученные теоретические знания для формулирования задач и для решения практических задач в профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестры освоения и формы промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 1, зачет.

Семестр 2, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются теоретические знания и практические навыки по следующим дисциплинам: школьный курс математики, математический анализ.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 з.е., 180 часов, из которых:

– лекции: 64 ч.;

– практические занятия: 64 ч.;

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Линейная алгебра.

Матрицы. Основные понятия, классификация. Понятие матрицы. Значение матриц для математики и естествознания. Фомы записи матриц (… расписанная, в компонентах…). Основные структурные составляющие матриц: элементы, строки, столбцы, главная (прямая) диагональ (диагональные элементы), недиагональные элементы и побочная (косая) диагональ. Математическая природа элементов матриц: действительные или комплексные числа, функции, векторы, матрицы, операторы… Подматрицы (субматрицы, блоки). Размерность (размер, порядок) матриц (количество строк и столбцов). Конечные и бесконечные матрицы. Виды матриц: прямоугольные матрицы (mxn), матрица-строка (строчная) (1xn) и матрица-столбец (nx1) col (a_1, a_2, … a_n)

(столбцевая, столбец) (mx1) — векторы. Диагональные матрицы (все недиагональные элементы равны нулю) diag(a_{11}, a_{22}, … , a_{nn}). Квадратные матрицы (nxn) (размер, порядок) квадратной матрицы (число строк (столбцов)). Скалярные матрицы. Единичная матрица.

Числовые матрицы: действительные ($\mathbf{A} = \mathrm{Re}\mathbf{A}$) и комплексные ($\mathbf{A} = \mathrm{Re}\mathbf{A} + i\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$). Положительные (действительные матрицы с положительными элементами) и неотрицательные матрицы (действительные матрицы с неотрицательными элементами).

Операции над матрицами. Сложение, умножение на число, транспонирование

Равенство матриц (матрицы **A** и **B** называются равными, что записывается как $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$). Отношение равенств матриц является отношением эквивалентности.

Коммутативная (абелева) группа относительно сложения матриц одной размерности:

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (коммутативность (перестановочность) сложения);

$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ ассоциативность (сочетательность) сложения;

$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ существование нулевого (коммутативной единице) элемента (нуля);

$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ или ($\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$) существование отрицательного элемента, $-\mathbf{A}$ — противоположная (аддитивно обратная) матрица.

Умножение или деление матрицы на число:

$1\mathbf{A} = \mathbf{A}1 = \mathbf{A}$ умножения матрицы на единицу;

$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$ ассоциативность (сочетательность) умножения вектора на число;

$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ дистрибутивность (распределительность);

$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$ дистрибутивность (распределительность);

$\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$ коммутативность (переместительность, перестановочность) умножения вектора на число.

Четыре свойства коммутативной группы относительно операции сложения и первые четыре утверждения свойств умножения матриц на число составляют восемь аксиом линейного пространства.

Транспонированные матрицы ($\mathbf{A}^T \equiv \mathbf{A}' \equiv \tilde{\mathbf{A}} \equiv {}^t\mathbf{A}$, $(\mathrm{A}_{ij})^T = \mathbf{A}_{ij}$) и их свойства ($(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$; $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$; $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{A}^T$). Симметрическая ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) и антисимметрические (кососимметрические) ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$) матрицы.

Определители матриц. Вычисление и свойства. Определитель (детерминант) квадратной матрицы. Формы записи $\Delta \equiv \det\mathbf{A} \equiv D\mathbf{A} \equiv |\,\mathbf{A}\,|$.

Правила вычисления определителей. Примеры вычисления определителей 2-го и 3-го порядков. Основная теорема о вычислении определителей (определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения). Определитель имеет $n!$ членов, каждый из которых имеет n сомножителей из элементов матрицы. Матрица **A** вырожденная (особенная, сингулярная), если $\det\mathbf{A} = 0$. Матрица вырожденная тогда и только тогда, когда у неё есть линейно зависимые строки (столбы). Матрица **A** невырожденная (неособенная, регулярная), если $\det\mathbf{A} \neq 0$. Матрица невырожденная тогда и только тогда, когда у неё все строки (столбы) линейно независимы. Теорема: В квадратной матрице количество линейно независимых строк равно количеству линейно независимых столбцов. Мнемонические правила для вычисления определителей 3-го порядка.

Свойства определителей: 1. При транспонировании матрицы её определитель не меняется $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T$.

2. При перестановке двух строк или двух столбцов матрицы её определитель меняет знак на противоположный (свойство антисимметрии).

3. Общий множитель строки или столбца матрицы определителя можно вынести за знак определителя.

Следствие: Если у матрицы есть нулевой столбец или нулевая строка, то её определитель равен нулю…

4. Если в матрице есть линейно зависимые строки или столбцы, то её определитель равен нулю.

5. Если к столбцу или строке прибавить другой столбец или строку с произвольным множителем, то определитель матрицы не изменится.

6. Если строка или столбец матрицы можно представить как сумму двух строк или двух столбцов, то определитель матрицы будет равен суммой определителей двух матриц.

7. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det\mathbf{A}\det(\mathbf{B})$.

8. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.

Миноры (адъюнкты) D_{ij}, которые получаются путём вычёркивания k строки и l столбца из матрицы, алгебраические дополнения A_{ij} миноров будет: $A_{ij} = (-1)^{k+l}D_{ij}$. Дополнительная матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{D}} \equiv \mathbf{A}^{\vee}$ к матрице $\mathbf{A}$.

Умножение с матриц. Умножение $\mathbf{AB}$. Операция умножения матриц определена, если матрицы сцеплены. Сцепленные матрицы (матрицы $\mathbf{AB}$ называются сцепленными, если число строк матрицы $\mathbf{A}$ равно числу столбцов матрицы $\mathbf{B}$. Сцепленность матриц в последовательности $\mathbf{AB}$ не значит их сцепленности в обратном направлении $\mathbf{BA}$).

Перестановочные (коммутативные) ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$) и не перестановочные (некоммутативные) ($\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$) матрицы относительно умножения (примечание: операция умножение для матриц может быть определена при одном порядке $\mathbf{BA}$ и неопределенна при другом $\mathbf{AB}$**)**. Если умножения для матриц определено, то оно ассоциативно $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Произведение матрицы-столбца (nx1) на матрицу-строку (1xn) и наоборот. Произведение квадратной матрицы (nxn) на матрицу-столбец (nx1). Произведение матрицы-строки (1xn) на квадратную матрицу (nxn). Операции над квадратными матрицами и их свойства.

Умножение на нулевую матрицу ($\mathbf{A0} = \mathbf{0}$). Единичная квадратная матрица (матрица тождественного преобразования) ($\mathbf{1} \equiv \mathbf{E} \equiv \boldsymbol{I} \equiv \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера) и правила её умножения ($\mathbf{A1} = \mathbf{1A} = \mathbf{A}$).

Некоммутативная группа умножения квадратных матриц одной размерности:

$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ ассоциативность (сочетательность) умножения;

$\mathbf{1A} = \mathbf{A1} = \mathbf{A}$ существование единичного элемента (коммутативной единицы или просто единицы);

$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ существование обратного элемента;

$\mathbf{AB}°\neq \mathbf{BA}$ некоммутативность (не перестановочность) умножения.

Эти свойства говорят, что операция умножения квадратных матриц одинаковой размерности образуют некоммутативную (неабелеву) группу.

Алгебраическая структура всех квадратных матриц одного порядка относительно операции сложения и умножения образуют (ассоциативные) кольца.

Обратные матрицы относительно операции умножения. Вычисление и свойства. Обратные (мультипликативно обратные) матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ для матрицы $\mathbf{A}$ ($\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$; $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$). Выражение обратных матриц через дополнительные ($\mathbf{A}^{-1} = (\det\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{D}})^{T}$). Обратимые и необратимые матрицы и их определители. Комплексно-сопряжённые (сопряженные) матрицы ($\mathbf{A} = \mathrm{Re}\mathbf{A} + i\mathrm{Im}\mathbf{A} \to \bar{\mathbf{A}} = \mathrm{Re}\mathbf{A} - i\mathrm{Im}\mathbf{A}$; $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$). Сопряженные (эрмитовосопряженные, самосопряженные) ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$) ($\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{A}^+ \equiv \bar{\mathbf{A}}^T$; $\mathbf{A}^{**} = \mathbf{A}$, $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$). Антиэрмитовы (косоэрмитовы, альтернирующие) ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$) матрицы. Нормальные матрицы ($\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^*$), т.е. коммутативные (переместительные) относительно умножения со своими сопряжёнными матрицами. О сведении нормальной матрицы к диагональной. Контраградиентная матрица ($(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\bar{\mathbf{A}}^T)^{-1}$). Специальные матрицы ($\det\mathbf{A} = 1$). Ортогональные ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{AA}^T = \mathbf{1}$; не вырожденные с $\det\mathbf{A} = \pm 1$), унитарные матрицы ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{*-1}$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^* = \mathbf{1}$) и унимодулярные (специальные унитарные, т. е. $\det\mathbf{A} = 1$ и $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{*-1}$). Возведение в целую степень квадратных матриц и сумм квадратных матриц.

Ранг матрицы, определение, свойства и способы его вычисления. Понятие и определение ранга произвольной матрицы $\mathrm{rang}\mathbf{A} \equiv \mathrm{rank}\mathbf{A} \equiv r_{\mathbf{A}}$. Ранг матрицы определяет максимальное число линейно независимых строк (столбцов). Ранг матрицы находится с количеством строк m и столбцов n в соотношении $\mathrm{rang}\mathbf{A} \leq \min(m, n)$. Свойства ранга: ранг матрицы не меняется при перестановке двух строк (столбцов); ранг матрицы не меняется при умножении строки (столбца) на число не равное нулю; ранг матрицы не меняется при сложении одной строки с другой помноженной на ненулевое число; $\mathrm{rang}\mathbf{A} = \mathrm{rang}\mathbf{A}^T$; $\mathrm{rang}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{rang}\mathbf{A} + \mathrm{rang}\mathbf{B}$; $(\mathrm{rang}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathrm{rang}\mathbf{A}, \mathrm{rang}\mathbf{B}\})$. Связь линейной зависимости строк и столбцов. Связь вырожденности и ранга квадратных матриц.

Базисный минор матрицы, это минор наивысшего порядка не равный нулю, т. е. равный рангу матрицы. Строки и столбцы базисного минора называются базисными строками и столбцами.

Системы линейных уравнений. Классификация и способы решений. Определение систем линейных уравнений. Классификация систем линейных уравнений. Однородные (без правой части) и неоднородные (с правой частью) системы линейных уравнений. Матричная запись линейных уравнений ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ - матрица коэффициентов системы, $\mathbf{x}$ — вектор неизвестных системы, $\mathbf{b}$ - вектор свободных членов). Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений. Роль определителя матрицы при нахождении корней системы уравнений. Вырожденные и невырожденные системы линейных уравнений. Линейная вырожденность столбцов или строк матрицы, вырожденность определителя.

Методы решения систем n неоднородных уравнений с n неизвестными. Метод исключения неизвестных. Метод эквивалентных преобразований (метод Гаусса).

Решение систем линейных уравнений и матричных уравнений методом обратной матрицы. Метод обратной матрицы ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$): Если $\det\mathbf{A} \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Метод (формулы) Крамера ($\mathbf{x}_i = D_i/\det\mathbf{A}$, D_i — миноры, получающиеся из $\det\mathbf{A}$ путём замены соответствующих столбцов матрицы определителя, столбцом правых частей (Если $\mathbf{A}$ — невырожденная матрица ($\det\mathbf{A} \neq 0$), а столбец правых частей не нулевой, система имеет одно решение; Если $\det\mathbf{A} = 0$ — система не имеет решений; Если столбец правых частей нулевой, то система имеет единственное нулевое решение, для случая $\det\mathbf{A} \neq 0$ и бесконечное число решений для случая $\det\mathbf{A} = 0$).

Теорема Кронекера — Капели.

Векторы. Геометрическое и алгебраическое представление векторов.

Системы координат в трёхмерном пространстве. Системы координат в трёхмерном пространстве: прямоугольная (декартова), цилиндрическая, сферическая.

Скалярные и векторные величины. Понятие скалярных и векторных величин.

Геометрическое и алгебраическое (матричное) представление векторов. Координаты вектора. Проекции вектора. Определение вектора. длина (модуль) и направление. Свойства модуля: положительность, однородность (умножение на число), неравенство треугольника. Коллинеарные и компланарные вектора. Стандартная форма вектора. Понятие линейной комбинации векторов. Условие линейной независимости системы векторов. Угол между векторами. Свойства проекций. Теорема о проекции. Скалярное произведение векторов и его свойства: дистрибутивность, коммутативность, однородность, положительная определённость.

Операции над векторами. Умножение на число и сложение. Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, разные частные случаи. Операции над векторами в координатной форме. Скалярное умножение векторов в геометрической и в алгебраической форме. Свойства скалярного умножение векторов.

Векторное произведение векторов. Векторное произведение векторов в геометрической и в алгебраической форме. Геометрический смысл и свойства векторного произведения векторов.

Смешанное произведение векторов. Смешанное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Двойное векторное произведение и его свойства. Ортогональный, нормированные и ортонормированные системы векторов. Базис и разложение вектора по базис.

Линейные пространства. Линейные операторы. Ядра и дефект линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Спектр оператора. Коэффициенты характеристического уравнения. Изоморфизм линейных пространств (определение и теорема). Изоморфизм.

Тема 2. Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости: различные виды уравнений. Прямая пропорциональная зависимость и её график – прямая линия. Прямая линия на плоскости: различные виды уравнений. Частный случай, C=0. Частный случай, A=0. Частный случай, B=0.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Тангенциальное уравнение прямой. Нормальное уравнение прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные несовпадающие точки.

Параметрическое уравнение прямой. Параметрическое уравнение прямой в векторной форме. Уравнение прямой проходящей через заданную точку и параллельно направляющему вектору. Уравнение прямой в полярных координатах ρ и φ.

Основные задачи на прямую и точки. Расстояние между двумя точками в декартовой системе координат. Отклонение и расстояние точки до прямой. Уравнение прямой, проходящей через точку параллельно заданной прямой. Уравнение прямой, перпендикулярной заданной прямой и проходящей через заданную точку. Прямая, проходящих через точку под фиксированным углом α к оси x.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Точка пересечения двух прямых. Взаимное расположение точек и прямых на плоскости. Взаимоотношение прямых на плоскости. Точка пересечения прямых определяется решением этой системы уравнений. Угол между двумя прямыми. Уравнение прямой, перпендикулярной заданной прямой. Уравнение прямой, перпендикулярное данной прямой и проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$.

Плоскость в пространстве. Плоскость. Уравнения плоскости. Общее уравнение (полное) плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Тангенциальное уравнение плоскости. Векторное уравнение плоскости. Нормальное (нормированное) уравнение плоскости. Уравнение в векторной форме. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору нормали. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Параметрическое уравнение плоскости.

Прямая в пространстве. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору. Параметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой в пространстве проходящей через заданную точку в направлении заданного вектора. Канонические уравнение прямой в пространстве (прямая, проходящая через две заданные точки). Отклонение и расстояние точки до плоскости. Угол между двумя прямыми. Общее уравнения прямой линии в пространстве как пересечение плоскостей. Каноническое уравнения прямой линии в пространстве, получаемое из общего уравнения прямой.

Угол между двумя прямыми. Уклонение и расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве, их признаки. Пучок плоскостей. Связка плоскостей. Взаимное расположение прямых и плоскостей, их параллельность и перпендикулярность. Взаимное расположение прямых в пространстве. Взаимное расположение плоскостей, их перпендикулярность и параллельность. Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямыми, прямой и плоскостью. Площадь ортогональной проекции, теорема о ней. Изображение пространственных фигур, их взаимное расположение. Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.Расстояние между скрещивающимися прямыми. Расстояние между двумя прямыми в пространстве. Расстояние между плоскостями в пространстве.

Линии второго порядка.

Эллипс. Форма эллипсов в зависимости от значений параметров. Смещённое уравнение эллипса (уравнение эллипса со смещённым центром). Параметрическое уравнение эллипса. Директрисы эллипса. Уравнение эллипса в полярных координатах. Касательная к эллипсу. Фокальный параметр эллипса. Оптические свойства эллипса. Некоторые свойства эллипса. Эллипс как проекция окружности. Эллипс как сечения круглого цилиндра. Эллипс в технике. Как нарисовать эллипс.

Окружность. Касательная к окружности.

Гипербола. Основной четырёхугольник. Асимптоты гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы. Фокальный параметр гиперболы. Сопряжённая гипербола. Гипербола со смещённым центром. Директрисы гиперболы. Подобные и софокусные гиперболы. Директрисы гиперболы. Равнобочная гипербола. Гипербола приведённая к асимптотам путём совмещения координат с асимптотами и получение «школьной гиперболы». Полярное уравнение гиперболы. Уравнение гиперболы в параметрическом виде. Касательная и нормаль к гиперболе. Хорды и диаметры гиперболы. Оптические свойства гиперболы. Построение гиперболы.

Парабола. Каноническое уравнение параболы. Элементы параболы. Некоторые свойства параболы. Форма параболы в зависимости от фокального параметра. Директриса. Смещённое уравнение параболы (уравнение параболы со смещённой вершиной. Виды парабол. Симметричная парабола. Сопряжённая парабола. Продольные параболы. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах. Касательная к параболе. «Школьная» парабола. Теорема о площади. Параболическая система координат. Оптические свойства параболы. Построение параболы. Построение параболы по точкам. Парабола в архитектуре. Невырожденные кривые второго порядка в физике.

Общее уравнение кривых второго порядка. Уравнение кривой второго порядка в матричном виде. Инварианты линий второго порядка.

Классификация линий второго порядка. Сводка формул линий второго порядка.

Преобразование координат на плоскости путём сдвигов и поворотов. Преобразование уравнения к центру. Параллельный перенос для упрощения уравнения линий второго порядка. Преобразование уравнений к осям симметрии. Поворот относительно начала координат. Общее обратное преобразование, сочетающее сдвиги и повороты. Матрицы поворотов.

Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка. Общее уравнение поверхности второго порядка.

Инварианты поверхности второго порядка.

Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоид, гиперболический параболоид.

Линейчатые поверхности.

Классификация поверхностей второго порядка

Преобразование координат в пространстве путём сдвигов и поворотов

Сдвиги координат. Матрицы сдвигов. Аффинные преобразования. Повороты (вращения) координат. Поворот вокруг оси x в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Поворот вокруг оси y в положительном направлении (против часовой стрелки). Поворот вокруг оси z в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Матрицы поворотов.

Углы Эйлера. Физические следствия вращений в трёхмерном пространстве физических тел. Собственное вращение, нутация и прецессия. Композиция матрицы поворотов на углы Эйлера.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет с оценкой в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и две задачи. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов

Линейная алгебра

1. Матрицы. Основные понятия, классификация
2. Операции над матрицами. Сложение, умножение на число, транспонирование
3. Определители матриц. Вычисление и свойства
4. Умножение с матриц
5. Обратные матрицы относительно операции умножения. Вычисление и свойства
6. Ранг матрицы, определение, свойства и способы его вычисления
7. Системы линейных уравнений. Классификация и способы решений
8. Решение систем линейных уравнений и матричных уравнений методом обратной матрицы
9. Решение систем линейных уравнений методом Крамера
10. Теорема Кронекера — Капели
11. Скалярные и векторные величины
12. Операции над векторами. Умножение на число и сложение
13. Векторное произведение векторов
14. Смешанное произведение векторов
15. Линейные пространства
16. Линейные операторы

Аналитическая геометрия

17. Прямая линия на плоскости: различные виды уравнений
18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости
19. Плоскость в пространстве
20. Прямая линия в пространстве
21. Общее уравнение кривых второго порядка
22. Эллипс
23. Гипербола
24. Парабола
25. Классификация линий второго порядка
26. Преобразование координат на плоскости путём сдвигов и поворотов
27. Поверхностей второго порядка
28. Преобразование координат в пространстве путём сдвигов и поворотов
29. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоид, гиперболический параболоид
30. Линейчатые поверхности
31. Классификация поверхностей второго порядка
32. Углы Эйлера

Примерный перечень практических вопросов

Задача 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Вычислить площадь параллелограмма, стороны которого образованы векторами $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

Задача 4. Найти объём параллелограмма, если его стороны образованны векторами
$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

Задача 5. Найти ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Задача 6. Найти объём пирамиды, вершины которой заданы точками
$A(1, 0, 4)$,$B(2, 7, 3)$,$C(4, 0, -1)$, $D(2, 8, -1)$

Задача 7. Исследовать систему на совместимость

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+3x_2-3x_3-x_4&=4, \\ 3x_1-x_2+3x_3-2x_4&=1, \\ 3x_1+x_2-x_4&=0, \\ 5x_1+4x_2-2x_3+x_4&=3. \end{aligned}\right\}$$

Задача 8. Найти угол между асимптотами гиперболы, если её эксцентриситет равен 2.

Задача 9. Решить систему методом Крамера

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3&=-8, \\ 2x_2+7x_3&=17. \end{aligned}\right\}$$

Задача 10. Найти расстояние между двумя прямыми $3x-4y+5=0$, $6x-8y-13=0$

Задача 11. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-2x_4-2x_5&=0, \\ 2x_1+3x_2-2x_3-5x_4-4x_5&=0, \\ x_1-x_2-x_3-2x_5&=0, \\ x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5&=0. \end{aligned}\right\}$$

Задача 12. Найти угол между плоскостью $2x-y-2z-1=0$ и прямой, проходящей через две точки $A(0, 2, 6)$,$B(3, 6, -6)$.

Задача 13. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора A

$$A=\begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Задача 14. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{7}$ и плоскостью $x+y-z+3=0$.

Задача 15. Найти общее и фундаментальное решение системы

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_3&=x_2+x_4-x_5, \\ 4x_1+x_3&=2x_2-2x_4-2x_5. \end{aligned}\right\}$$

Задача 16. Найти уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в точках $F_1(-2, 4)$ и $F_2(12, 4)$, а длина мнимой оси равна 6.

Задача 17. Найти коммутатор $[A, B]_-$ и антикоммутатор $[A, B]_+$ матриц A и B

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Задача 18. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 0, -3)$ и параллельно прямой, заданной плоскостями $x+2y-z+3=0$ и $3x-y+4z+2=0$.

Задача 19. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 0, -3)$ и параллельно прямой, заданной плоскостями $x+2y-z+3=0$ и $3x-y+4z+2=0$.
Задача 20. Являются ли матрицы взаимно обратными

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача 21. Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x+y-6=0, \\ -5y-2z-8=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x+4y+z-2=0$. Если они не параллельны, найти точку их пересечения.
Задача 22. Найти $(A+3B)^2$, если A и B матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Задача 23. Привести к каноническому виду уравнение $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$, определить основные характеристики и построить
Задача 24. Найти все перестановочные матрицы для матрицы A

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Задача 25. Написать уравнение гиперболы и ее асимптот, если фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$ и длина вещественной оси равна 6.
Задача 26. Найти обратную матрицу матрицы A

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Задача 27. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить её каноническое уравнение, если она проходит через точку $A=(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.
Задача 28. Найти общее и фундаментальное решение системы

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0; \end{cases}$$

Задача 29. Показать, что уравнение $y+x^2-6x+5=0$ определяет параболу. Найти значение ее параметра и координаты вершины.
Задача 30. Решить систему методом обратной матрицы

$$\left.\begin{aligned} 2x-4y+z&=3, \\ x-5y+3z&=-1, \\ x-y+z&=1. \end{aligned}\right\}$$

Задача 31. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(2,1)$, асимптоты которой $y=\pm(3/4)x$.
Задача 32. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Задача 33. Найти уравнение сферы, проходящей через 4 точки $A(1, 1, 0)$, $B(7, -11, 0)$, $C(10, 1, 9)$, $D(-2, -11, 9)$

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Далее необходимо описать каким образом текущий контроль влияет на промежуточную аттестацию и в каком случае ставится «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

В случае применения балльно-рейтинговой системы, они описывается в п.9 и п.11 с учетом текущего контроля и промежуточной аттестации, на промежуточную аттестацию планируется не более 40% рейтинга.

В случае применения систем оценивания, отличных от пятибалльной, описать механизм перевода оценки в пятибалльную шкалу.

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из друх теоретических вопросов и двух практических заданий. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Структура экзамена должна соответствовать компетентностной структуре дисциплине. При описании системы оценивания итогового контроля по дисциплине необходимо продемонстрировать достижение всех запланированных индикаторов – результатов обучения.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в среде электронного обучения iDO - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=00000

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

Линейная алгебра

1. Матрицы. Основные понятия, классификация .
2. Операции над матрицами. Сложение, умножение на число, транспонирование.
3. Определители матриц. Вычисление и свойства.
4. Умножение с матриц.
5. Обратные матрицы. Вычисление и свойства.
6. Ранг матрицы и его определение.
7. Системы линейных уравнений. Классификация и способы решений.
8. Решение систем линейных уравнений и матричных уравнений методом обратной матрицы
9. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
10. Решение однородных и неоднородных систем уравнений с бесконечным множеством решений.
11. Теорема Кронекера — Капели
12. Скалярные и векторные величины
13. Операции над векторами. Умножение на число и сложение.
14. Векторное произведение векторов.
15. Смешанное произведение векторов.
16. Линейные пространства.
17. Линейные операторы.
18. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.

Аналитическая геометрия

19. Прямая линия на плоскости: различные виды уравнений
20. Взаимное расположение двух прямых на плоскости
21. Плоскость в пространстве
22. Прямая линия в пространстве

23. Общее уравнение кривых второго порядка
24. Эллипс
25. Гипербола
26. Парабола
27. Классификация линий второго порядка
28. Преобразование координат на плоскости путём сдвигов и поворотов
29. Поверхностей второго порядка
30. Преобразование координат в пространстве путём сдвигов и поворотов
31. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоид, гиперболический параболоид
32. Линейчатые поверхности
33. Классификация поверхностей второго порядка
34. Углы Эйлера

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. − М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 512 с.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. − М.: Высшая школа, 1998. 320 с.

3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.

4. Бухтяк М.С. Основы линейной алгебры. Томск: Изд-во Томского государственного университета, 2009. 200с.

5. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. − М.: Изд-во МГУ, 1969. 698 с.

6. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. − М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. 384 с.

7. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре./ Под ред. Смирнова Ю.М. − М.: Логос, 2005. 376 с.

8. Проскуряков Н.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Изд-во «Лань», 2016. 480 с.

9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Изд-во «Лань», 2016. 224 с.

10. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М., 1968.

б) дополнительная литература:

11. Богачев К. Ю. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. - М., 1998.

12. Булгаков Д. Н., Попов А. М. Билинейные и квадратичные формы. - М., 2001 Винберг Э. Б. Курс алгебры. - М., 2001.

13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.

14. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. - М., 1998.

11. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. - М., 1975.

15. Кострикин А. И. Введение в алгебру. - М., 1994.

16. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия.

17. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М., 1968.

18. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры.

19. Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. Симметрические билинейные формы. - М., 1986.

20. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. - М., 2005.

21. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. - М., 1966.

22. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. - Спб., 1999.

23. Халмош П. Конечномерные векторные пространства.

24. Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. - Ижевск, 1999.

в) ресурсы сети Интернет:

http://www.mathnet.ru/ Общероссийский математический портал http://www.fipm.ru/ Линейная алгебра и геометрия. СПРАВОЧНИК

http://www.mathnet.ru/index.phtml/?option_lang=rus Общероссийский математический портал

http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm МатемУравнения

http://www.imath.kiev.ua/~golub/rmsites.html *Избранные математические сайты*

http://lib.mexmat.ru/ МГУ, мехмат, электронная библиотека

http://matcreative.ru/sayt-matematicheskie-etyudy Математические этюды

http://pco.iis.nsk.su/grapp/ Тосковый словарь по теории ГРАФОВ

http://www.fractalworld.xaoc.ru/ Фракталы

http://www.ph4s.ru/programs_4.html Математические программы

http://forum.ru-board.com/topic.cgi?forum=5&topic=4633&start=1960 Всё о TEX.

Литература программы

1. Архив электронных научных статей
2. Учебные материалы для студентов МехМата МГУ
3. Европейская система поиска математических препринтов MPRESS
4. Московское математическое общество
5. Московский центр непрерывного образования
6. Высшая аттестационная комиссия МО и науки РФ
7. Российское образование. Федеральный портал
8. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU

http://www.ph4s.ru/index.html Математическая библиотека

http://www.ph4s.ru/programs_4.html Программы математические на математической библиотеке

Математическая библиотека http://math.ru/lib/. На сайте размещены книги, видео-лекции, задачи, истории из жизни математиков, которые будут интересны как специалистам, так и широкому кругу любителей математики.

https://www.math10.com/ru/vysshaya-matematika/

Формулы по математике и физике

http://nuclphys.sinp.msu.ru/ Учеб материалы "Физика атомного ядра и частиц" НИИЯФ МГУ

http://www.indigomath.ru/ Формулы по математике и физике

http://всеформулы.рф/ Все формулы по Физике и Математике

http://формулыпофизике.рф/ Формулы по физике

https://sciterm.ru/spravochnik/atomnaya-fizika-formuli/ Атомная физика

https://spravochnick.ru/fizika/atomnaya_fizika/atomnaya_fizika_osnovnye_ponyatiya_i_formuly/ Справочник с формулами

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчике

Чуриков Виктор Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, каф. геометрии ТГУ, доцент.