

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Введение в теорию вероятностей и математическую статистику

по направлению подготовки

01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Информационная безопасность

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
А.Ю. Матророва

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-3.2 Анализирует математические модели для решения прикладных задач профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– задания рабочей тетради.

Типовые задания рабочей тетради: (ИОПК-3.2)

Тема 1. Случайные события:

1. Две игральные кости бросаются одновременно. Найти вероятности следующих событий:

А – сумма выпавших очков равна 8;

В – произведение выпавших очков равно 8;

С – сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

2. Имеется 55 шариков, которые случайным образом разбрасываются по 10 лункам. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет только 1 шарик, во вторую – 2 шарика, в третью – 3, и так далее, и в десятую лунку попадет ровно 10 шариков.

Тема 2. Случайные величины:

1. Производится 10 независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью 0,35 появляется событие А. Составить ряд распределения случайной величины X – числа появлений события, противоположного А в 10 опытах. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

2. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $m=3$. Построить функцию распределения случайной величины X и найти: а) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание; б) вероятность того, что величина X примет положительное значение.

Тема 3. Случайные векторы:

1. В группе из 20 студентов только двое пропустили более половины занятий, и именно они получили оценку «2» на экзамене. Из остальных студентов 5 человек получили оценку «5», 10 человек - оценку «3» и 3 студента получили «3». Составить таблицу совместного распределения оценки на экзамене (X) и индикатора пропуска более половины занятий (Y) для выбранного студента. Найти функцию совместного распределения вектора (X, Y). Найти маргинальные законы распределения с.в. X и Y . Зависимы ли с.в. X и Y . Найти математические ожидания EX и EY . Найти дисперсии DX и DY . Найти $Cov(X, Y)$. Найти коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$. Найти условные законы распределения с.в. X . Найти $Cov(20X-10Y, X-Y)$. Найти условное математическое ожидание $EX|Y$ (регрессию X на Y).

2. Имеется урна с 3 белыми и 3 черными шарами. Производится последовательное извлечение шаров (без возвращения) до первого появления белого шара; ξ – число извлеченных шаров. Далее извлечение шаров продолжается до первого появления черного шара; η – число шаров, извлеченных во второй серии. Требуется составить законы распределения (ξ, η) , ξ и η .

Тема 4. Характеристическая и производящая функция:

1. Найти характеристические функции для плотностей вероятностей:

А) $f(x) = \frac{a}{2} \exp\{-a|x|\}$;

Б) $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$;

В) $\frac{2\sin^2 \frac{ax}{2}}{\pi ax^2}$.

2. Найти распределение вероятностей случайной величины, характеристическая функция которой равна:

А) $\cos t$;

Б) $\frac{\sin at}{at}$;

В) $\frac{a}{a+it}$.

Тема 5. Элементы статистики.

1. Через каждый час измерялось напряжение в электросети. При этом были получены следующие значения (в вольтах):

227, 219, 215, 230, 232, 223, 220, 222, 218, 219, 222, 221, 227, 226, 226, 209, 211, 215, 218, 220, 216, 220, 221, 225, 224, 212, 217, 219, 220

Построить гистограмму, полигон частот, эмпирическую функцию распределения; оценить вероятность того, что напряжение не превосходит 220В.

2. Построить доверительные интервалы для вероятности успеха p в одном опыте:

а) $n = 60$; $m = 15$; $\gamma = 0,95$;

б) $n = 200$; $m = 70$; $\gamma = 0,9$;

Критерии оценивания:

Задание из рабочей тетради считается выполненным «верно», если выполняются следующие требования:

- получен правильный ответ на каждый поставленный вопрос задачи;
- верно выполнены все требования условия задачи (построение графика, диаграммы и т.п.)
- представлен и аргументирован ход решения задачи (вычисления, используемые формулы).

В противном случае задание не может считаться выполненным «верно».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Промежуточная аттестация проводится в виде зачета, оценка «зачет» или «незачет» выставляется согласно следующим критериям:

«зачет» выставляется на основе выполнения более 80% заданий рабочей тетради;

«незачет» выставляется на основе выполнения менее 30% заданий рабочей тетради.

При выполнении от 30% до 80% заданий рабочей тетради проводится дополнительное оценочное мероприятие – индивидуальный контрольный набор из 5

задач, по одной задаче по каждой теме курса. В этом случае оценка «зачет» выставляется при условии правильного решения всех задач индивидуального контрольного набора, в противном случае выставляется оценка «незачет».

Примерный вариант индивидуального набора заданий: (ИОПК-3.2)

1. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:
А – все пассажиры выйдут на четвертом этаже;
В – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);
С – все пассажиры выйдут на разных этажах.
2. Техническое устройство состоит из трех узлов. В первом узле n_1 элементов, во втором n_2 , в третьем n_3 элементов. Первый узел безусловно необходим для работы устройства, второй и третий – дублируют друг друга. Время исправной работы каждого элемента распределено по показательному закону, среднее время работы элементов первого узла t_1 , второго – t_2 , третьего – t_3 . Первый узел выходит из строя, если в нем отказало не менее двух элементов, второй узел, как и дублирующий его третий, выходит из строя при отказе хотя бы одного элемента. Для выхода из строя технического устройства достаточно, чтобы вышел из строя первый узел или второй и третий узлы вместе. Найти вероятность того, что за время T техническое устройство выйдет из строя.
3. При выяснении причин недостачи драгоценных металлов в ювелирном магазине установлено, что их взвешивание производится на весах, цена деления которых равна 0,1 г, а показания весов округляются при взвешивании до ближайшего деления их шкалы, причём округления на любые значения от $-0,05$ до $0,05$ равновероятны. Оценить возможность возникновения ошибки более, чем на 0,03 г, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение потерь.
4. Найти распределение вероятностей случайной величины, характеристическая функция которой равна $\cos^2 t$.
5. Как изменятся выборочные среднее и дисперсия, если результаты наблюдения подвергнуть преобразованию масштаба, т.е. увеличить или уменьшить одновременно в k раз?

Ответы на вопросы даются развернуто в письменной форме, оценивается правильность полученного результата, используемые методы решения, построение и аргументация логики решения.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Примеры тестовых заданий: (ИОПК- 3.2)

1. На полке лежат 5 маркированных и 5 немаркированных конверта. Наудачу берут 2 конверта. Вероятность того, что оба конверта маркированные, равна:
а) $2/9$ б) $1/36$ в) $5/18$ г) $5/9$
2. Стрелок производит 4 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Тогда вероятность того, что мишень будет поражена не менее 2 раз, равна:

- а) 0,2627 б) 0,2048 в) 0,7373 г) 0,9728

3. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	-2	0	1
P	0.2	0.3	0.5

Дисперсия D(X) равна:

- а) 1,05 б) 1,29 в) 1,3 г) 0,31

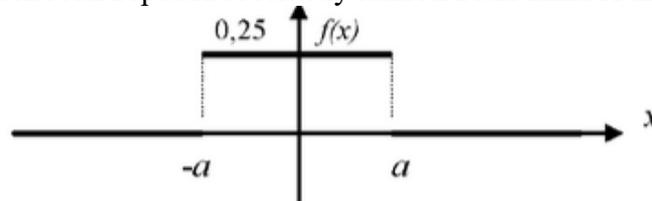
4. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Тогда вероятность P(1 < X < 3) равна:

- а) 0,75 б) 0,25 в) 0,2 г) 0,5

5. График плотности вероятностей случайной величины X имеет вид:



Тогда значение параметра α равно:

- а) 4 б) 2 в) 1 г) 0,5

6. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x, & x \in (0,3) \\ 0, & x \notin (0,3) \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание M(2X+1) равно:

- а) 6.2 б) 2.8 в) 5 г) 5.4

7. Дан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

Y \ X	-1	0	1
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0,5

Тогда математическое ожидание M(X-2Y) равно:

- а) -1,7 б) 1,0 в) 0,4 г) 0,4

8. Случайный вектор (X,Y) имеет равномерное с вершинами в точках A(0,0); B(2,0); C(0,1); D(2,1). Тогда значение двумерной плотности вероятностей f(x, y) внутри этого прямоугольника равно:
а) 0,5 б) 0,25 в) 2 г) 4

Ключи: 1. а) 2. г) 3. б) 4. а) 5. б) 6. в) 7. б) 8. а)

Примеры задач: (ИОПК-3.2)

Задача 1

Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время их прихода равновозможно в течение суток. Какова вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки одного теплохода - 2 часа, а второго - 3 часа?

Задача 2

Из трех пистолетов выбирается наудачу один и производится выстрел. Вероятности попадания в цель из пистолетов соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Известно, что произошел промах. Из какого пистолета вероятнее всего был произведен выстрел?

Задача 3.

Событие В наступает в том случае, если событие А появится не менее 3 раз. Определить вероятность появления события В, если вероятность появления события А при одном опыте равна 0,3 и произведено 5 независимых опытов.

Ответы:

Задача 1. 0.197

Задача 2. Из третьего

Задача 3. 0.16308

Информация о разработчиках

Туренова Ирина Алексеевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ.