

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:  
Директор  
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Введение в теорию вероятностей и математическую статистику

по направлению подготовки

**01.04.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Информационная безопасность**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Магистр**

Год приема  
**2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
А.Ю. Матросова

Председатель УМК  
С.П. Сущенко

Томск – 2024

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-3.2 Анализирует математические модели для решения прикладных задач профессиональной деятельности.

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля:

– задания рабочей тетради.

Типовые задания рабочей тетради: (ИОПК-3.2)

Тема 1. Случайные события:

1. Две игральные кости бросаются одновременно. Найти вероятности следующих событий:

А – сумма выпавших очков равна 8;

В – произведение выпавших очков равно 8;

С – сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

2. Имеется 55 шариков, которые случайным образом разбрасываются по 10 лункам. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет только 1 шарик, во вторую – 2 шарика, в третью – 3, и так далее, и в десятую лунку попадет ровно 10 шариков.

Тема 2. Случайные величины:

1. Производится 10 независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью 0,35 появляется событие А. Составить ряд распределения случайной величины  $X$  – числа появлений события, противоположного А в 10 опытах. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

2. Случайная величина  $X$  имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием  $m=3$ . Построить функцию распределения случайной величины  $X$  и найти: а) вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание; б) вероятность того, что величина  $X$  примет положительное значение.

Тема 3. Случайные векторы:

1. В группе из 20 студентов только двое пропустили более половины занятий, и именно они получили оценку «2» на экзамене. Из остальных студентов 5 человек получили оценку «5», 10 человек - оценку «3» и 3 студента получили «3». Составить таблицу совместного распределения оценки на экзамене ( $X$ ) и индикатора пропуска более половины занятий ( $Y$ ) для выбранного студента. Найти функцию совместного распределения вектора  $(X, Y)$ . Найти маргинальные законы распределения с.в.  $X$  и  $Y$ . Зависимы ли с.в.  $X$  и  $Y$ . Найти математические ожидания  $EX$  и  $EY$ . Найти дисперсии  $DX$  и  $DY$ . Найти  $Cov(X, Y)$ . Найти коэффициент корреляции  $\rho(X, Y)$ . Найти условные законы распределения с.в.  $X$ . Найти  $Cov(20X-10Y, X-Y)$ . Найти условное математическое ожидание  $EX|Y$  (регрессию  $X$  на  $Y$ ).

2. Имеется урна с 3 белыми и 3 черными шарами. Производится последовательное извлечение шаров (без возвращения) до первого появления белого шара;  $\xi$  – число извлеченных шаров. Далее извлечение шаров продолжается до первого появления черного шара;  $\eta$  – число шаров, извлеченных во второй серии. Требуется составить законы распределения  $(\xi, \eta)$ ,  $\xi$  и  $\eta$ .

Тема 4. Характеристическая и производящая функция:

1. Найти характеристические функции для плотностей вероятностей:

А)  $f(x) = \frac{a}{2} \exp\{-a|x|\}$ ;

Б)  $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ ;

В)  $\frac{2\sin^2 \frac{ax}{2}}{\pi ax^2}$ .

2. Найти распределение вероятностей случайной величины, характеристическая функция которой равна:

А)  $\cos t$ ;

Б)  $\frac{\sin at}{at}$ ;

В)  $\frac{a}{a+it}$ .

Тема 5. Элементы статистики.

1. Через каждый час измерялось напряжение в электросети. При этом были получены следующие значения (в вольтах):

227, 219, 215, 230, 232, 223, 220, 222, 218, 219, 222, 221, 227, 226, 226, 209, 211, 215, 218, 220, 216, 220, 221, 225, 224, 212, 217, 219, 220

Построить гистограмму, полигон частот, эмпирическую функцию распределения; оценить вероятность того, что напряжение не превосходит 220В.

2. Построить доверительные интервалы для вероятности успеха  $p$  в одном опыте:

а)  $n = 60$ ;  $m = 15$ ;  $\gamma = 0,95$ ;

б)  $n = 200$ ;  $m = 70$ ;  $\gamma = 0,9$ ;

Критерии оценивания:

Задание из рабочей тетради считается выполненным «верно», если выполняются следующие требования:

- получен правильный ответ на каждый поставленный вопрос задачи;
- верно выполнены все требования условия задачи (построение графика, диаграммы и т.п.)
- представлен и аргументирован ход решения задачи (вычисления, используемые формулы).

В противном случае задание не может считаться выполненным «верно».

### **3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

Промежуточная аттестация проводится в виде зачета, оценка «зачет» или «незачет» выставляется согласно следующим критериям:

«зачет» выставляется на основе выполнения более 80% заданий рабочей тетради;

«незачет» выставляется на основе выполнения менее 30% заданий рабочей тетради.

При выполнении от 30% до 80% заданий рабочей тетради проводится дополнительное оценочное мероприятие – индивидуальный контрольный набор из 5

задач, по одной задаче по каждой теме курса. В этом случае оценка «зачет» выставляется при условии правильного решения всех задач индивидуального контрольного набора, в противном случае выставляется оценка «незачет».

Примерный вариант индивидуального набора заданий: (ИОПК-3.2)

1. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:  
А – все пассажиры выйдут на четвертом этаже;  
В – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);  
С – все пассажиры выйдут на разных этажах.
2. Техническое устройство состоит из трех узлов. В первом узле  $n_1$  элементов, во втором  $n_2$ , в третьем  $n_3$  элементов. Первый узел безусловно необходим для работы устройства, второй и третий – дублируют друг друга. Время исправной работы каждого элемента распределено по показательному закону, среднее время работы элементов первого узла  $t_1$ , второго –  $t_2$ , третьего –  $t_3$ . Первый узел выходит из строя, если в нем отказало не менее двух элементов, второй узел, как и дублирующий его третий, выходит из строя при отказе хотя бы одного элемента. Для выхода из строя технического устройства достаточно, чтобы вышел из строя первый узел или второй и третий узлы вместе. Найти вероятность того, что за время  $T$  техническое устройство выйдет из строя.
3. При выяснении причин недостачи драгоценных металлов в ювелирном магазине установлено, что их взвешивание производится на весах, цена деления которых равна 0,1 г, а показания весов округляются при взвешивании до ближайшего деления их шкалы, причём округления на любые значения от  $-0,05$  до  $0,05$  равновероятны. Оценить возможность возникновения ошибки более, чем на 0,03 г, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение потерь.
4. Найти распределение вероятностей случайной величины, характеристическая функция которой равна  $\cos^2 t$ .
5. Как изменятся выборочные среднее и дисперсия, если результаты наблюдения подвергнуть преобразованию масштаба, т.е. увеличить или уменьшить одновременно в  $k$  раз?

Ответы на вопросы даются развернуто в письменной форме, оценивается правильность полученного результата, используемые методы решения, построение и аргументация логики решения.

#### **4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

Примеры тестовых заданий: (ИОПК- 3.2)

1. На полке лежат 5 маркированных и 5 немаркированных конверта. Наудачу берут 2 конверта. Вероятность того, что оба конверта маркированные, равна:  
а)  $2/9$     б)  $1/36$     в)  $5/18$     г)  $5/9$
2. Стрелок производит 4 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Тогда вероятность того, что мишень будет поражена не менее 2 раз, равна:

- а) 0,2627    б) 0,2048    в) 0,7373    г) 0,9728

3. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

<b>X</b>	<b>-2</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>P</b>	0.2	0.3	0.5

Дисперсия D(X) равна:

- а) 1,05    б) 1,29    в) 1,3    г) 0,31

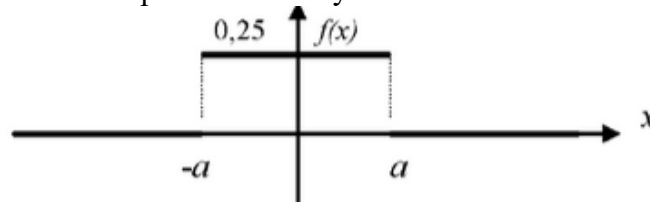
4. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Тогда вероятность P(1 < X < 3) равна:

- а) 0,75    б) 0,25    в) 0,2    г) 0,5

5. График плотности вероятностей случайной величины X имеет вид:



Тогда значение параметра  $\alpha$  равно:

- а) 4    б) 2    в) 1    г) 0,5

6. Плотность вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x, & x \in (0,3) \\ 0, & x \notin (0,3) \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание M(2X+1) равно:

- а) 6.2    б) 2.8    в) 5    г) 5.4

7. Дан закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y):

<b>Y \ X</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	0,2	0,1	0,1
<b>2</b>	0,1	0	0,5

Тогда математическое ожидание M(X-2Y) равно:

- а) -1,7    б) 1,0    в) 0,4    г) 0,4

8. Случайный вектор (X,Y) имеет равномерное с вершинами в точках A(0,0); B(2,0); C(0,1); D(2,1). Тогда значение двумерной плотности вероятностей f(x, y) внутри этого прямоугольника равно:  
а) 0,5    б) 0,25    в) 2    г) 4

Ключи: 1. а) 2. г) 3. б) 4. а) 5. б) 6. в) 7. б) 8. а)

Примеры задач: (ИОПК-3.2)

Задача 1

Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время их прихода равновозможно в течение суток. Какова вероятность того, что одному из теплоходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки одного теплохода - 2 часа, а второго - 3 часа?

#### Задача 2

Из трех пистолетов выбирается наудачу один и производится выстрел. Вероятности попадания в цель из пистолетов соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Известно, что произошел промах. Из какого пистолета вероятнее всего был произведен выстрел?

#### Задача 3.

Событие В наступает в том случае, если событие А появится не менее 3 раз. Определить вероятность появления события В, если вероятность появления события А при одном опыте равна 0,3 и произведено 5 независимых опытов.

Ответы:

Задача 1. 0.197

Задача 2. Из третьего

Задача 3. 0.16308

#### **Информация о разработчиках**

Туренова Ирина Алексеевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ.