Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
Л. В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Численные методы оптимизации

по направлению подготовки / специальности

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Вычислительная математика и компьютерное моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель / Исследователь в области математики и компьютерных наук

Год приема
2024, 2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук и механики в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-1.1 Знает типовые постановки задач математики и механики, классические методы решения, теоретические основы методов и границы их применимости

РООПК-1.2 Способен адаптировать известные математические методы для решения поставленной задачи в области математики и механики

РООПК-1.3 Способен провести решение поставленной задачи в области математики и механики с использованием полученных фундаментальных знаний и получить результат

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– выполнение индивидуальных заданий.

Примеры индивидуального задания (РООПК-1.2, РООПК-1.3).

Индивидуальное задание состоит из двух частей:

1) Решение задачи безусловной минимизации.
2) Решение задачи условной минимизации.

Пример индивидуального задания:

Целевую функцию исходной задачи исследовать на выпуклость. Обосновать сходимость численного решения соответствующего метода к решению задачи. Написать программу расчета задачи на языке C/C++ или Python. Представить отчет по проведенным исследованиям и полученным результатам расчета.

Вариант 1

Для решения задачи одномерной минимизации использовать метод *дихотомического поиска* (с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-5}$).

1). Методами (с точностью $\varepsilon_2 = 10^{-4}$):

- *циклического покоординатного спуска;*
- *метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге;*
- *скорейшего спуска;*
- *сопряженных градиентов (вариант Флетчера – Ривза).*

найти решение задачи безусловной минимизации:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 3x_1x_3 - 2x_2 + x_2x_3 - x_3 + x_1x_4 - x_4 - 2 \to \min$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$$

2). Найти решение задачи условной минимизации

$$2x_1^2 + x_2^2 + 4(x_2 - x_1) + 6 \to \min$$

$$\textit{при условии } x_1 + x_2 = 1$$

.

методом штрафных функций с точностью $\varepsilon_3 \approx 10^{-2}$.

Для выполнения численного этапа метода использовать метод безусловной минимизации (с точностью $\varepsilon_2 \approx 10^{-4}$)
- *сопряженных градиентов (вариант Флетчера – Ривза).*

Вариант 2.

Для решения задачи одномерной минимизации использовать метод *золотого сечения* (с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-5}$).

1). Методами (с точностью $\varepsilon_2 = 10^{-4}$):
- *конфигураций;*
- *метод наилучшей пробы;*
- *скорейшего спуска;*
- *Ньютона - Рафсона.*

найти решение задачи безусловной минимизации:

$$2x_1^{\;2} + 3x_2^{\;2} + 4x_3^{\;2} - 2x_1x_2 - x_1 - 5x_2 + x_2x_3 - x_3 \to \min$$

$$(x_1\;, x_2, x_3) \in R^3$$

2). Найти решение задачи условной минимизации

$$3x_1^{\;2} + x_2^{\;2} + 4x_2 + 6 \to \min$$

$$\text{\textit{при условии}}\;\; 2x_1 + x_2 \geq 3\;.$$

методом штрафных функций с точностью $\varepsilon_3 \approx 10^{-2}$.

Для выполнения численного этапа метода использовать метод безусловной минимизации (с точностью $\varepsilon_2 \approx 10^{-4}$)
- *Ньютона - Рафсона.*

Ответы:

Вариант 1: 1) целевая функция строго выпукла, рассмотренные методы сходятся к стационарной точке: $x^* = (-0.321,\ 0.299,\ 0.208,\ 0.661)$, $f(x^*) = -2.733$.

2) целевая функция выпукла, метод штрафных функций сходится к решению: $x^* = (1.666,\ -0.667)$, $f(x^*) = 2.666$.

Вариант 2: 1) целевая функция сильно выпукла, рассмотренные методы сходятся к оптимальной точке $x^* = (0.801,\ 1.103,\ -0.013)$, $f(x^*) = -3.151$.

2) целевая функция выпукла, метод штрафных функций сходится к решению: $x^* = (1.428,\ 0.142)$, $f(x^*) = 12.712$.

Критерии оценивания текущей аттестации.

Результаты выполнения индивидуальных заданий определяются оценками «зачтено», «не зачтено».

Оценка «зачтено», если разработаны программы и получены правильные численные решения поставленной задачи, представлен отчет по индивидуальному заданию.

Оценка «не зачтено», если нет программы решения или программа дает неправильные решения, отсутствует отчет.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в шестом семестре проводится в устной форме по билетам. Экзамнационный билет состоит из двух частей.

Первая часть содержит два вопроса, проверяющие РООПК-1.1. Ответы на вопросы даются в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий РООПК-1.2 и оформленный в виде практической задачи.

При проведении экзамена учитываются следующие факторы: посещаемость студентом лекций и практических занятий, выполнение индивидуальных заданий в срок, ответ на вопрос в билете и на дополнительные вопросы. Ответ на вопрос второй части предполагают решение задачи и краткую интерпретацию полученного результата

Примерный перечень теоретических вопросов (РООПК-1.1).

1. Постановка задачи оптимизации. Основные понятия. Классификация задач математического программирования.
2. Определение выпуклой, строго выпуклой, сильно выпуклой, строго квази выпуклой функций. Дифференциальные критерии выпуклости.
3. Экстремальные свойства выпуклых функций.
4. Определение минимизирующей последовательности, релаксационного процесса, метода спуска, вектора спуска. Общая схема методов спуска.
5. Основные понятия о численных методах оптимизации: сходимость метода, скорость сходимости методов оптимизации. Критерии остановки методов оптимизации для бесконечно-шаговых методов.

Примеры задач (РООПК-1.2).

1. Методом координатного спуска найти решение задачи минимизации:
   $(x_0-2)^2+(x_1+3)^2-x_0+4 \to \min$
   $\overline{x} \in R^2$
   начальная точка $x_0=0,\ x_1=0$.
2. Методом скорейшего спуска найти решение задачи минимизации:
   $(x_0-2)^2+(x_1+3)^2-x_0+4 \to \min$
   $\overline{x} \in R^2$
   начальная точка $x_0=0,\ x_1=0$.
3. Методом сопряженных градиентов найти решение задачи минимизации:
   $x_0^2+x_1^2+x_0x_1+4x_0-x_1 \to \min$
   $\overline{x} \in R^2$
   начальная точка $x_0=0,\ x_1=0$.
4. Методом Ньютона найти решение задачи минимизации:
   $x_0^2+2x_1^2+x_0x_1+5x_0-x_1 \to \min$
   $\overline{x} \in R^2$
   начальная точка $x_0=0,\ x_1=0$.
5. Методом штрафных функций найти решение задачи минимизации:
   $(x_0-2)^2+(x_1+3)^2-x_0+4 \to \min$
   $\textit{при условии } 2x_0+x_1+1$
   начальная точка $x_0=0,\ x_1=0$.

По ответам на вопросы на экзамене и по итогам выполненного индивидуального задания может быть поставлена максимальная оценка «отлично». При ответе на вопросы и защите отчетов оценивается полнота, точность, логичность и аргументированность изложения материала.

Таблица 1

Оценка	Критерии соответствия
отлично	Правильно и развернуто изложен материал каждого вопроса билета . Студент полно, четко и логично излагает материал вопроса и защищаемый материал задания.
хорошо	Правильно изложен материал каждого вопроса, но не весь материал изложен развернуто и логически структурировано.
удовлетворительно	В целом правильно изложен материал каждого вопроса, но изложение носит поверхностный характер и с нарушением логики изложения.
неудовлетворительно	Материал ответа на каждый вопрос представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными концепциями дисциплины. Допущены существенные терминологические и фактические ошибки.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тесты (РООПК-1.1)

1. Пусть задана функция $f(x), x \in X \subset R^n$. Для каких из ниже перечисленных функций матрица Гессе положительно определена?

а). строго выпуклых;
б). вогнутых;
в). сильновыпуклых;
г). сильновогнутых.
д). выпуклых.

*2. «*Точка x^* – строгое локальное решение задачи минимизации функции $f(x)$, заданной на множестве $X \subseteq R^n$,если…»?

а). $f(x) \leq f(x^*)$ *для* $\forall x \in X$;

б). $\exists \varepsilon > 0$ *такое,что* $f(x) < f(x^*)$ *для* $\forall x \in X \bigcap \{x \in X : \| x - x^* \| \leq \varepsilon, x \neq x^*\}$;

в). $\exists \varepsilon > 0$ *такое,что* $f(\bar{x}) \leq f(x^*)$ *для* $\forall x \in X \bigcap \{x \in X : \| x - x^* \| \leq \varepsilon\}$;

г). $f(x) < f(x^*)$ *для* $\forall x \in X, x \neq x^*$.

3. Какие из перечисленных ниже численных методов оптимизации относятся к методам первого порядка?

а). метод скорейшего спуска;
б). метод циклического координатного спуска;
в). метод Хука-Дживса;
г). метод Ньютона-Рафссона;
д). метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривза;
е). квазиньютоновский метод Девидона-Флетчера-Пауэла.

Правильный ответ: 1,5,6.

Ключи: 1 а),в); 2 б); 3 *а*),*д*),*е*).

Тесты (РООПК-1.1)

4. Определите к какому классу принадлежит функция в заданной области $f(\overline{x}) = 4(x_1 - x_0)^2 + e^{x_0} - 4x_0$, $\overline{x} \in R^2$

а). строго выпуклая;
б). вогнутая;
в). выпуклая;
г). сильновогнутая;
д). сильновыпуклая;
е). не выпуклая и не вогнутая.

5. *Ис*следовать функцию на выпуклость
$f(\overline{x}) = x_0^2 + x_1^2 - 8x_0x_1 + 4$, $\overline{x} \in R^2$

а). выпуклая;
б). сильно выпуклая;
в). не выпукла.

Ключи: 3 *д*), 4 *в*).

Теоретические вопросы (РООПК-1.1):

1. Общая схема методов спуска.
Привести общую формулу методов спуска, дать определение вектора спуска и способы выбора этого вектора, способы выбора константы спуска.
2. Классификация задач математического программирования.
Ответ должен содержать понятия целевой функции, допустимого множества, оптимального множества и критерии классификации.
3. Необходимые и достаточное условия оптимальности для дифференцируемой функции.
Привести условия, которым должна удовлетворять оптимальная точка, и условия из которых следует, что полученная точка является оптимальной.
4. Метод сопряженных градиентов для квадратичной функции.
Дать определение А-сопряженности системы векторов, привести схему метода.
5. Классификация численных методов оптимизации.
Привести критерии, по которым производится классификации численных методов.

Информация о разработчиках

Лаева Валентина Ивановна, кафедра вычислительной математики и компьютерного моделирования ММФ ТГУ, старший преподаватель.