

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Комплексный анализ

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- коллоквиум;
- контрольные работы;
- домашние работы.

Пример билетов для коллоквиума.

Билет №1.

1. Сфера комплексных чисел.
2. Сформулировать и доказать теорему Коши: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \dots$. Замечания.

Билет №2.

1. Определение функции комплексной переменной. Однозначные и многозначные ветви.
2. Сформулировать и доказать достаточные условия дифференцируемости ФКП.

Билет №3.

1. Дать определение комплексной функции действительной переменной, ее предела. Дать определение непрерывности и производной.
2. Интегральная формула Коши для высших производных.

Билет №4.

1. Определение дифференцируемой ФКП. Определение функции, аналитической в области и в точке.
2. Обратные тригонометрические функции.

Билет №5.

1. Определение интегральных сумм для интеграла от ФКП. Определение интеграла.
2. Условия Коши-Римана. Сформулировать и доказать необходимость.

Билет №6.

1. Сформулировать следствия теоремы Коши о высших производных.
2. Условия Коши-Римана. Сформулировать и доказать достаточность.

Билет №7.

1. Определение предела последовательности. Свойства.
2. Теорема о среднем значении интеграла от ФКП. Теорема о необходимом и достаточном условии равенства нулю интеграла по замкнутому контуру.

Билет №8.

1. Определение линейной ФКП и функции степени с натуральным показателем.
2. Теорема о необходимом и достаточном условии равенства нулю интеграла от ФКП. Интегральная теорема Коши.

Билет №9.

1. Сфера комплексных чисел.
2. Теорема о двух первообразных одной функции.

Билет №10.

1. Области и границы.
2. Теорема о представлении первообразной интегралом с переменным пределом. Следствия.

Пример контрольной работы №1.

1. Найти множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:
 $|z - 4| < |1 - 4\bar{z}|.$
2. Решить уравнение: $e^z + 2i = 0.$

3. Пользуясь условиями Коши-Римана, установить, является ли функция аналитической хотя бы в одной точке:

$$f(z) = \operatorname{ch} z \cdot \operatorname{Im} z.$$

4. Найти:

$$\int_C (z^2 + z \cdot \bar{z}) dz, \quad C: |z| = 2, -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi.$$

5. Вычислить, используя интегральные формулы Коши:

$$\text{а) } \oint_{|z|=4} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 3z} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z-1|=3} \frac{\operatorname{ch} z}{(z-1)^2 z^2} dz.$$

Пример контрольной работы №2.

1. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2in}{3^n}.$

2. Найти радиус и область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

3. Разложить в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ функцию:

$$f(z) = z^5 \cos \frac{1}{z}.$$

4. Разложить в ряд Лорана в кольце $1 < |z+2| < 3$ функцию:

$$f(z) = \frac{4}{z^2 - 1}.$$

5. Найти нули функции и установить их порядок:

$$f(z) = (z - \pi i)(1 - \operatorname{ch} z).$$

6. Найти особые точки и установить их характер:

$$f(z) = \frac{1}{(1 - \cos z)^2}.$$

Критерии оценивания:

В рамках текущего контроля оцениваются: посещаемость, выполнение домашних работ, выполнение контрольных работ, выступление с докладами. Оценивание производится по пятибалльной шкале.

Посещение.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
90%-100% занятий	75% - 89,9% занятий	65% - 74,9% занятий	Менее 65 % занятий

Домашние работы.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Опоздание не более 5 дней	Опоздание от 6 до 16 дней	Опоздание от 17 до 30 дней	Опоздание более 30 дней

Контрольные работы.

Каждое задание оценивается по пятибалльной шкале, оценка за контрольную выставляется как среднее арифметическое.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

Коллоквиум.

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Ответ на вопрос выполнен без недочетов..	Ответ на вопрос присутствует, но имеются не принципиальные неточности в рассуждениях.	Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки.	Ответ не соответствует вопросу или отсутствует.

Выступление с докладом повышает среднюю арифметическую оценку за семестр на 0,1 балла.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационные билеты.

Билет №1.

3. Сфера комплексных чисел. Области и границы.
4. Теорема о существовании окрестности нуля функции, в которой нет других нулей, и ее следствие.

Билет №2.

3. Определение комплексной функции действительного и комплексного переменного. Однозначные и многозначные ветви.
4. Теорема о единственности (тождественном равенстве двух функций).

Билет №3.

3. Предел функции комплексного переменного.
4. Основная теорема о вычетах (сумма вычетов...).

Билет №4.

3. Определение дифференцируемой функции. Определение функции, дифференцируемой в области и в точке.
4. Теорема Коши о вычетах.

Билет №5.

3. Определение интегральных сумм для интеграла от ФКП. Определение интеграла.
4. Условия Коши-Римана. Сформулировать и доказать необходимость.

Билет №5.

3. Определение изолированной особой точки. Виды особых точек.
4. Условия Коши-Римана. Сформулировать и доказать достаточность.

Билет №6.

3. Определение предела последовательности. Свойства.
4. Теорема о среднем значении интеграла от ФКП. Теорема о необходимом и достаточном условии равенства нулю интеграла по замкнутому контуру.

Билет №7.

3. Определение равномерной сходимости функционального ряда в комплексной области.
4. Теорема о необходимом и достаточном условии равенства нулю. Интегральная теорема Коши.

Билет №8.

3. Стандартные разложения Тейлора.
4. Теорема о двух первообразных одной функции.

Билет №9.

3. Определение сходимости и абсолютной сходимости ряда в комплексной области..
4. Теорема о представлении первообразной интегралом с переменным пределом. Следствия.

Билет №10.

1. Условия применения и формулы интегрирования по частям и замены переменных.
2. Теорема о мероморфной функции.

Билет №11.

1. Определение логарифмической ФКП.
2. Интегральная формула Коши.

Билет №12.

1. Определение степенной функции с натуральным показателем.
2. Формула Коши для высших производных.

Билет №13.

1. Гиперболические функции. Связь с тригонометрическими.
2. Теорема Вейерштрасса.

Билет №14.

1. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции.
2. Теорема Абеля. Следствие.

Билет №15.

1. Определение функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$. Ее особенности.
2. Теорема 1 о радиусе сходимости степенного ряда.

Билет №16.

1. Определение нуля функции и его порядка.
2. Теорема: степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Билет №17.

1. Предел комплексной функции действительной переменной и ее производная.
2. Теорема Коши о представимости функции рядом Тейлора.

Билет №18.

1. Определение ряда Лорана и его составляющих.
2. Теоремы Лиувилля и Мореры.

Билет №19.

1. Определение непрерывности функции в точке и в области.
2. Теорема о единственности разложения в ряд Лорана.

Билет №20.

1. Определение дифференцируемой функции.
2. Теорема о разложении функции в ряд Лорана в кольце (вычисление коэффициентов правильной части).

Билет №21.

1. Определение вычета функции.
2. Теорема о разложении функции в ряд Лорана в кольце (вычисление коэффициентов правильной части).

Билет №22.

1. Виды целых функций.
2. Необходимое и достаточное условие устранимой особой точки на основе ряда Лорана.

Билет №23.

1. Определение мероморфной функции.
2. Необходимое и достаточное условие полюса (через нуль соответствующей функции).

Билет №24.

1. Определение целой функции.
2. Необходимое и достаточное условие полюса на основе ряда Лорана.

Билет №25.

1. Определение вычета в бесконечно удаленной точке.
2. Теорема Сохоцкого.

Билет №26.

1. Сфера комплексных чисел.
2. Теорема о вычислении вычета в бесконечно-удаленной точке.

Экзаменационные задачи.

1. Определить характер бесконечно удаленной особой точки и найти вычет в ней:

$$f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z^2}.$$

2. Определить характер бесконечно удаленной особой точки и найти вычет в ней:

$$f(z) = \frac{z^2}{1 - z^2}.$$

3. Определить характер бесконечно удаленной особой точки и найти вычет в ней:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\operatorname{sh} z}.$$

4. Определить характер бесконечно удаленной особой точки и найти вычет в ней:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\operatorname{ch} z}.$$

5. Определить характер бесконечно удаленной особой точки и найти вычет в ней:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin z}.$$

6. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = -2$:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z + 2}.$$

7. Разложить в ряд Лорана в кольце.

$$f(z) = \frac{1}{(z - 5)(z - 3)}, \quad 3 < |z| < 5.$$

8. Разложить в ряд Лорана в кольце:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z}, \quad 1 < |z| < +\infty.$$

9. Разложить в ряд Лорана в кольце:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z}, \quad 0 < |z| < 2.$$

10. Разложить в ряд Лорана в кольце:

$$f(z) = \frac{1}{4z^2 + z}, \quad 0 < |z| < \frac{1}{4}.$$

11. Найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}.$$

12. Найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{(1 - \cos 2z)^2}.$$

13. Найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}.$$

14. Найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = \frac{\operatorname{th} z}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}.$$

15. Найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 + \frac{\pi}{4}z}.$$

16. Вычислить с помощью вычетов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

17. Вычислить с помощью вычетов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

18. Вычислить с помощью вычетов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^3}.$$

19. Вычислить с помощью вычетов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

20. Вычислить с помощью вычетов:

$$\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz.$$

Критерии оценивания:

Каждый вопрос билета, кроме последнего, оценивается в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Ответ на вопрос выполнен без недочетов..	Ответ на вопрос присутствует, но имеются не принципиальные неточности в рассуждениях.	Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки.	Ответ не соответствует вопросу или отсутствует.

Если в рамках текущего контроля сдан коллоквиум с оценкой не ниже «удовлетворительно», то эта оценка может быть использована по желанию обучающегося в качестве оценок за соответствующие вопросы.

Последний вопрос билета оценивается в соответствии с таблицей:

отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
Приведено полное обоснованное решение	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.	Решение не соответствует задаче или отсутствует.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи (ИОПК 1.1-1.4).

1. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = z^3 - i \cdot \bar{z}$.

Ответ: $\operatorname{Re} z = x^3 - 3xy^2 - y$; $\operatorname{Im} z = 3x^2y - y^3 - x$.

2. Найти значение модуля и главное значение аргумента функции $f(z) = \sin z$ в точке $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$.

Ответ: $|\sin(\pi + i \ln(2 + \sqrt{5}))| = 2$; $\arg(\pi + i \ln(2 + \sqrt{5})) = -\frac{\pi}{2}$.

3. Решить уравнение: $\sin z = 3$.

Ответ: $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(3 \pm \sqrt{8}), k \in \mathbb{Z}$.

4. Доказать аналитичность функции $f(z) = e^z$ на всей комплексной плоскости.

Примечание. Использовать условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

5. Вычислить: $\int_C (z^2 + z \cdot \bar{z}) dz, C: |z|=1, 0 \leq \arg z \leq \pi$.

Ответ: $-\frac{8}{3}$.

6. Вычислить: $\int_0^i z \cos z dz$.

Ответ: $\frac{1-e}{e}$.

7. Вычислить: $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} dz$.

Примечание: использовать интегральные формулы Коши.

Ответ: $-\frac{\pi i}{2e}$.

8. Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Разложить по степеням z функцию $f(z) = \frac{1}{1+2z}$ и указать радиус сходимости.

Примечание: использовать стандартные разложения в ряд Тейлора.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n z^n, R = \frac{1}{2}$.

10. Найти нули функции $f(z) = 1 + \cos z$ и определить их порядок.

Ответ: $z_n = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ - нули второго порядка.

11. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z(z-\pi)^3}$ и установить их характер.

Ответ: $z = 0$ - простой полюс; $z = \pi$ - полюс третьего порядка.

12. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}$ в кольце $1 < |z| < 2$.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$

13. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}$ во всех особых точках, включая бесконечно удаленную точку.

14. Вычислить с помощью вычетов интеграл: $\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz.$

Ответ: $2\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right).$

15. Вычислить: $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1 + z^{12}}.$

Примечание. Использовать вычет в бесконечно удаленной точке и основную теорему Коши о вычетах.

Ответ: 0.

Теоретические вопросы (ИОПК 3.1-3.4).

1. Использование понятия ряда Лорана для установления характера и порядка нулей и особых точек функции комплексного переменного.

Ответ должен содержать определение нулей и изолированных конечных особых точек функции и их классификацию, а также определение бесконечно удаленной особой точки. Он должен содержать определение ряда Лорана, его особенностей. Должна быть продемонстрирована возможность использования стандартных разложений Тейлора при формировании ряда Лорана.

2. Использование теории вычетов для вычисления интегралов в действительной области.

Ответ должен содержать определение понятия вычетов в конечных особых точках и бесконечно удаленной особой точке, формулы для вычисления вычета в зависимости от характера особой точки. Необходимо привести теоремы, являющиеся основой для использования вычетов при вычислении интегралов в комплексной области. Необходимо также привести условия и алгоритмы использования вычетов для вычисления интегралов в действительной области.

Информация о разработчиках

Гендрина Ирина Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.