

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:

Декан
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Дифференциальная геометрия

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:
Современная математика и математическое моделирование
Вычислительная математика и компьютерное моделирование
Теоретическая, вычислительная и экспериментальная механика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Математик. Преподаватель / Математик. Аналитик / Математик. Исследователь
Математик. Преподаватель / Математик. Вычислитель /
Исследователь в области математики и компьютерных наук
Механик. / Механик. Исследователь

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

РООПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

РООПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа;

Контрольная работа состоит из 3-4 задач.

Примеры задач:

1. Написать уравнение касательной и нормали кривой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \\ y = t^2 \end{cases} \text{ в точке } t = 2.$$

2. Составить уравнение эволюты кривой $y = \ln x$.

3. Найти уравнение главной нормали и кривизны кривой $\vec{r} = \left\{ \frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2} \right\}$ в точке

$$M_0 \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right).$$

4. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ параллельные прямой $2x - y + 17 = 0$.

5. Вычислить кривизну кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ в точке $(1,1)$.

6. Составить уравнение бинормали и определить кручение кривой $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ z = \frac{x^3}{6} \end{cases}$ в точке $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.
7. В какой точке параболы $y = x^2$ касательная образует с осью Ox угол 45° ?
8. Вычислить кручение кривой $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$.
9. На кривой $\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, t\}$ найти точки, в которых главная нормаль перпендикулярна вектору $P = \{1, -1, 3\}$.
10. Написать уравнение касательной и нормали кривой $2x^2 - x^2 y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $(1, -2)$.
11. Найти углы между следующими линиями $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.
12. В каких точках с одной и той же абсциссой касательные к $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?
13. Составить уравнение главной нормали и бинормали кривой $\vec{r}(t) = \{t, t^2, e^t\}$ в точке $t = 0$.
14. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ в точке $M(u = 2, v = 1)$.
15. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.
16. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$ – параболоид вращения.
17. Вычислить главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $M(1, 1, 1)$.
18. Найти полную кривизну параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

Ответы к задачам:

1. $\begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}, 3x - 2y + 14 = 0.$

$$2. \quad \left\{ 2x + \frac{1}{x}, \ln x - (x^2 + 1) \right\}.$$

$$3. \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = \frac{2}{3} + \lambda, \frac{2}{9}. \\ z = \frac{1}{2} - 2\lambda \end{cases}$$

$$4. \quad 2x + y \pm 12 = 0.$$

$$5. \quad \frac{1}{13\sqrt{13}}.$$

$$6. \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda, \frac{8}{27}. \\ z = \frac{1}{6} + \lambda \end{cases}$$

$$7. \quad \left(\pm \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

$$8. \quad \frac{-\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

$$9. \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\pi}{4} + 2\pi m \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \right).$$

$$10. \quad -7x + 5y + 17 = 0.$$

$$11. \quad 90^\circ, \arccos \frac{4}{5}.$$

$$12. \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27} \right).$$

$$13. \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4\lambda, \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -\lambda. \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$14. \quad 3x - y - 2z - 4 = 0, \quad \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda. \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

$$15. \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0, \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \frac{x_0}{a^2} \\ y = y_0 + \lambda \frac{y_0}{b^2} \\ z = z_0 + \lambda \frac{z_0}{c^2} \end{cases}.$$

$$16. \quad I = (1 + 4u^2)(du)^2 + u^2(dv)^2.$$

$$17. \quad -\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$18. \quad \frac{p^2 q^2}{(u^2 + v^2 + p^2 q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «зачёт», «незачёт».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая часть, вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2. Ответ на вопрос дается в развернутой форме.

Третья часть содержит вопрос, проверяющий ИПК-1.3 и оформлен в виде практической задачи. Ответ на вопрос третьей части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов:

1. Вектор-функция. Годограф. Теорема о пределе произведения.
2. Дифференцирование вектор-функций. Теорема о дифференцировании произведения.
3. Регулярные кривые. Натуральный параметр.
4. Касательная прямая. Нормальная плоскость пространственной кривой.
5. Репер Френе. Сопровождающий трехгранник.
6. Дериационные формулы репера Френе.
7. Кривизна и кручение пространственной кривой.
8. Строение кривой в окрестности обыкновенной точки.
9. Эволюта и эвольвента.
10. Огибающая семейства плоских кривых.
11. Регулярные поверхности. Координатная сеть.
12. Касательная плоскость. Нормальная прямая поверхности.
13. Первая квадратичная форма. Геометрический смысл.
14. Вторая квадратичная форма. Геометрический смысл.
15. Линейчатые поверхности.
16. Нормальная кривизна линий на поверхности. Формула Менье.
17. Индикатриса Дюпена.
18. Оператор Вейнгартена. Матрица оператора.
19. Главные направления и главные кривизны.
20. Формула Эйлера.
21. Омбилические точки.
22. Полная и средняя кривизны поверхности.
23. Сферическое отображение.

24. Семейство линий на поверхности.
25. Линии кривизны. Теорема Родрига.
26. Асимптотические линии.
27. Нормальная и геодезическая кривизны.
28. Геодезические линии на поверхности.
29. Изгибание поверхностей. Теорема Гаусса.
30. Деривационные формулы репера поверхности.

Примеры задач:

1. Написать уравнение касательной и нормали кривой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \\ y = t^2 \end{cases} \text{ в точке } t = 2.$$

2. Составить уравнение эволюты кривой $y = \ln x$.

3. Найти уравнение главной нормали и кривизны кривой $\vec{r} = \left\{ \frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2} \right\}$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ параллельные прямой $2x - y + 17 = 0$.

5. Вычислить кривизну кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ в точке $(1, 1)$.

6. Составить уравнение бинормали и определить кручение кривой $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ z = \frac{x^3}{6} \end{cases}$ в точке $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

7. В какой точке параболы $y = x^2$ касательная образует с осью Ox угол 45° ?

8. Вычислить кручение кривой $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$.

9. На кривой $\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, t\}$ найти точки, в которых главная нормаль перпендикулярна вектору $P = \{1, -1, 3\}$.

10. Написать уравнение касательной и нормали кривой $2x^2 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $(1, -2)$.

11. Найти углы между следующими линиями $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

12. В каких точках с одной и той же абсциссой касательные к $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?
13. Составить уравнение главной нормали и бинормали кривой $r(t) = \{t, t^2, e^t\}$ в точке $t = 0$.
14. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ в точке $M(u = 2, v = 1)$.
15. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.
16. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$ – параболоид вращения.
17. Вычислить главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $M(1, 1, 1)$.
18. Найти полную кривизну параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

Ответы к задачам:

1. $\begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}, 3x - 2y + 14 = 0.$

2. $\left\{ 2x + \frac{1}{x}, \ln x - (x^2 + 1) \right\}.$

3. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = \frac{2}{3} + \lambda, \frac{2}{9} \\ z = \frac{1}{2} - 2\lambda \end{cases}.$

4. $2x + y \pm 12 = 0.$

5. $\frac{1}{13\sqrt{13}}.$

6. $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda, \frac{8}{27} \\ z = \frac{1}{6} + \lambda \end{cases}.$

$$7. \quad \left(\pm \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

$$8. \quad \frac{-\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

$$9. \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\pi}{4} + 2\pi m \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \right).$$

$$10. \quad -7x + 5y + 17 = 0.$$

$$11. \quad 90^\circ, \arccos \frac{4}{5}.$$

$$12. \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27} \right).$$

$$13. \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}.$$

$$14. \quad 3x - y - 2z - 4 = 0, \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}.$$

$$15. \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0, \begin{cases} x = x_0 + \lambda \frac{x_0}{a^2} \\ y = y_0 + \lambda \frac{y_0}{b^2} \\ z = z_0 + \lambda \frac{z_0}{c^2} \end{cases}.$$

$$16. \quad I = (1 + 4u^2)(du)^2 + u^2(dv)^2.$$

$$17. \quad -\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$18. \quad \frac{p^2 q^2}{(u^2 + v^2 + p^2 q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны развернутые ответы на все теоретические вопросы и задача решена без ошибок. Оценка «хорошо» выставляется, если ответы на теоретические вопросы не полные или один освещен в полной мере, а ответ на второй вопрос отсутствует, задача решена без ошибок или развернутые ответы на все теоретические вопросы, но задача не решена. Оценка «удовлетворительно» выставляется, если оба теоретических вопроса развернуты очень слабо, но решена задача или нет ответа на теоретический вопрос и не решена задача. Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если нет ответа на все вопросы.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи:

1. Написать уравнение касательной и нормали кривой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \\ y = t^2 \end{cases} \text{ в точке } t = 2.$$

2. Составить уравнение эволюты кривой $y = \ln x$.

3. Найти уравнение главной нормали и кривизны кривой $\vec{r} = \left\{ \frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2} \right\}$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ параллельные прямой $2x - y + 17 = 0$.

5. Вычислить кривизну кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ в точке $(1,1)$.

6. Составить уравнение бинормали и определить кручение кривой $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ z = \frac{x^3}{6} \end{cases}$ в точке $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

7. В какой точке параболы $y = x^2$ касательная образует с осью Ox угол 45° ?

8. Вычислить кручение кривой $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$.

9. На кривой $\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, t\}$ найти точки, в которых главная нормаль перпендикулярна вектору $\vec{P} = \{1, -1, 3\}$.

10. Написать уравнение касательной и нормали кривой $2x^2 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $(1, -2)$.
11. Найти углы между следующими линиями $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.
12. В каких точках с одной и той же абсциссой касательные к $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?
13. Составить уравнение главной нормали и бинормали кривой $\vec{r}(t) = \{t, t^2, e^t\}$ в точке $t = 0$.
14. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ в точке $M(u = 2, v = 1)$.
15. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.
16. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$ – параболоид вращения.
17. Вычислить главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $M(1, 1, 1)$.
18. Найти полную кривизну параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

Ответы к задачам:

$$1. \quad \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}, 3x - 2y + 14 = 0.$$

$$2. \quad \left\{ 2x + \frac{1}{x}, \ln x - (x^2 + 1) \right\}.$$

$$3. \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = \frac{2}{3} + \lambda, \frac{2}{9} \\ z = \frac{1}{2} - 2\lambda \end{cases}.$$

$$4. \quad 2x + y \pm 12 = 0.$$

$$5. \quad \frac{1}{13\sqrt{13}}.$$

$$6. \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda, \frac{8}{27}. \\ z = \frac{1}{6} + \lambda \end{cases}$$

$$7. \quad \left(\pm \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

$$8. \quad \frac{-\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

$$9. \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\pi}{4} + 2\pi m \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \right).$$

$$10. \quad -7x + 5y + 17 = 0.$$

$$11. \quad 90^\circ, \arccos \frac{4}{5}.$$

$$12. \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27} \right).$$

$$13. \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}.$$

$$14. \quad 3x - y - 2z - 4 = 0, \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}.$$

$$15. \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0, \begin{cases} x = x_0 + \lambda \frac{x_0}{a^2} \\ y = y_0 + \lambda \frac{y_0}{b^2} \\ z = z_0 + \lambda \frac{z_0}{c^2} \end{cases}.$$

$$16. \quad I = (1 + 4u^2)(du)^2 + u^2(dv)^2.$$

$$17. \quad -\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$18. \frac{p^2 q^2}{(u^2 + v^2 + p^2 q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Теоретические вопросы:

1. Вектор-функция. Годограф. Теорема о пределе произведения.
2. Дифференцирование вектор-функций. Теорема о дифференцировании произведения.
3. Регулярные кривые. Натуральный параметр.
4. Касательная прямая. Нормальная плоскость пространственной кривой.
5. Репер Френе. Сопровождающий трехгранник.
6. Дериwационные формулы репера Френе.
7. Кривизна и кручение пространственной кривой.
8. Строение кривой в окрестности обыкновенной точки.
9. Эволюта и эвольвента.
10. Огибающая семейства плоских кривых.
11. Регулярные поверхности. Координатная сеть.
12. Касательная плоскость. Нормальная прямая поверхности.
13. Первая квадратичная форма. Геометрический смысл.
14. Вторая квадратичная форма. Геометрический смысл.
15. Линейчатые поверхности.
16. Нормальная кривизна линий на поверхности. Формула Менье.
17. Индикатриса Дюпена.
18. Оператор Вейнгартена. Матрица оператора.
19. Главные направления и главные кривизны.
20. Формула Эйлера.
21. Омбилические точки.
22. Полная и средняя кривизны поверхности.
23. Сферическое отображение.
24. Семейство линий на поверхности.
25. Линии кривизны. Теорема Родрига.
26. Асимптотические линии.
27. Нормальная и геодезическая кривизны.
28. Геодезические линии на поверхности.
29. Изгибание поверхностей. Теорема Гаусса.
30. Дериwационные формулы репера поверхности.

Информация о разработчиках

Корякина Елена Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент, ТГУ, ММФ, доцент