

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Основания математики

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023, 2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А. Крылов

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ОПК-3 Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.2 Анализирует актуальные и значимые проблемы математики и существующие подходы к их решению.

ИОПК 3.1 Популярно и доступно излагает современные научные достижения в сфере математики для аудитории различного уровня

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить определения и теоремы курса оснований математики с доказательствами. Владеть базовыми знаниями об элементах теории множеств и математической логики, мощности множеств, аксиоматической теории множеств, числовых системах, таких понятиях как кардинал и ординал. Научиться решать задачи логики высказываний, теории множеств, находить мощность множеств, определять виды функций. Познакомиться с понятиями об аксиоматической теории множеств, иметь представление о числовых системах.

– Рассмотреть разделы школьной математики, для которых возможно углубление знаний школьного уровня с использованием рассматриваемых понятий оснований математики. Адаптировать понятия матлогики, теории множеств, теории функций для учеников разного уровня путём составления тематического конспекта.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Третий семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по дисциплине Методика преподавания математики и информатики.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:
-лекции: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Математическая логика.

Логика высказываний. Решение задач ЕГЭ. Логика предикатов.

Тема 2. Теория множеств.

Канторовская теория множеств. Мощность множества. Кардиналы.

Тема 3. Отношения.

Отношения. Функции. Вполне упорядоченные множества. Ординалы.

Тема 4. Аксиоматические теории.

Аксиоматическая теория множеств. Числовые системы.


9. Текущий контроль по дисциплине

1	Логика высказываний. Решение задач ЕГЭ. Логика предикатов.	Контрольная работа 1 ИОПК 1.2, ИОПК 3.1
2	Канторовская теория множеств. Мощность множества. Кардиналы.	Контрольная работа 2 ИОПК 1.2
3	Отношения. Функции. Вполне упорядоченные множества. Ординалы.	Тест ИОПК 1.2
4	Аксиоматическая теория множеств. Числовые системы.	Составление и защита тематического конспекта ИОПК 1.2, ИОПК 3.1

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. В случае перехода факультета на дистанционное обучение, все виды работ полностью, либо частично, могут быть переведены в дистанционный (онлайн) формат, в зависимости от необходимости с использованием LMS MOODLE.

Для проведения текущего контроля СРС преподаватель может проводить небольшие тесты на каждом занятии, в том числе с использованием LMS MOODLE, контрольные работы, собеседования по пройденному материалу.

Критерий оценки контрольной работы, теста, собеседования по теме, составленного конспекта.

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
<50% заданий выполнено правильно	50%-70% заданий выполнено правильно	70%-90% заданий выполнено правильно	>90% заданий выполнено правильно
<p>Контрольная работа 1 Логика высказываний Вариант 1</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Записать СДНФ и СКНФ по данной таблице значений булевой функции, соответствующей формуле алгебры логики $f(P, Q, R) = [01000011]$ 2. Доказать, что формула алгебры логики является тавтологией $((\overline{P \rightarrow Q}) \wedge R) \rightarrow \overline{R} \vee \overline{Q}$ 3. Найти КНФ и ДНФ формулы $\overline{((\overline{P \wedge R}) \rightarrow Q) \vee R}$ 4. Доказать логическое следствие $B \rightarrow (A \rightarrow C), A \wedge C \rightarrow B \models A \rightarrow B$ 5. По схеме записать формулу, упростить и записать схему 		<p>Контрольная работа 2. Операции и отношения над множествами. Мощность множества. Вариант 1.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Упростить множество $((R \cap Q) \cap R) \cup R \cap \overline{Q}$ 2. Верно ли равенство $B \cup (A \cap C) \cup A = (A \cap C) \cup B$? 3. Найти объединение и пересечение множеств $A = \{1, 5, 8, 2\}, B = \{1, 3, 2, 5\}$ 4. Установить взаимно однозначное соответствие между множествами $A = [0, 1], B = [0, 1]$ 5. Найти мощность множества $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n - \frac{1}{n}\}$ 	

Тест. Отношения. Функции. Числовые множества, Метод математической индукции, Числа рациональные и иррациональные. Moodle.

Темы конспекта: Числовые множества, Метод математической индукции, Числа рациональные и иррациональные и др.

Домашние задания для самостоятельной работы по темам 3, 4.

1. Являются ли следующие отношения отношениями эквивалентности: отношение параллельности для прямых на плоскости, отношение на множестве фундаментальных последовательностей через предел разности равный нулю.
2. Доказать, что следующие отношения являются отношениями порядка: отношение включения для множеств, отношение делимости на множестве натуральных чисел.
3. Выяснить какие из следующих отображений являются взаимно однозначными: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x), f(x) = x, f(x) = x^2$. Как изменить область определения или область значений функций, чтобы они стали взаимнооднозначными?
4. Доказать, что если два отображения взаимно однозначны и определена их композиция, то она так же взаимно однозначна.
5. Доказать по индукции, что для каждого натурального n , выражение $n^3 - n$ делится на 3.
6. На множестве всех действительных чисел заданы три высказывания: $p(x): x$ -целое, $q(x): x^2 - nx$ - целое отрицательное число, $r(x): x + \frac{1}{x}$ - целое положительное число.
При каком значении x ложно одно и только одно из этих трёх высказываний.
7. Доказать, что $\ln(n+10)$ иррациональное число.
8. Каким будет число $\sqrt{2n+1} + \sqrt{3}$ иррациональным или рациональным? Доказать.
9. Найти три нижних и верхних десятичных приближения числа $\frac{1}{\alpha}$, где α - вещественное число.
10. Извлечь квадратный корень из числа 7 с точностью до 0,01.
11. Представить дробь 31,2(88) в виде обыкновенной.
12. Доказать, что любую положительную периодическую десятичную дробь, не имеющую в периоде цифру 9, можно получить как результат деления натуральных чисел.
13. Доказать, что любую положительную периодическую десятичную дробь, имеющую в периоде цифру 9, нельзя получить как результат деления натуральных чисел.
14. Доказать, что между двумя вещественными числами $a, b, (a < b)$ найдётся рациональное число.
15. Доказать, что между двумя вещественными числами $a, b, (a < b)$ найдётся иррациональное число.
16. Доказать, что между двумя вещественными числами $a, b, (a < b)$ существует бесконечно много как иррациональных, так и рациональных чисел.
17. Докажите транзитивность отношения равенства и отношения порядка на множестве вещественных чисел.
18. Напишите с помощью кванторов определение ограниченного снизу множества. Постройте отрицание этого определения.
19. Дайте определение супремума, инфимума множества.
20. Покажите, что точные грани (супремум, инфимум) могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству.
21. Сформулируйте определение неограниченного множества.
22. Найдите супремум, инфимум (если они существуют) для множеств: $(0;1), [0;1], (0;1],[0;1)$.

23. Пусть X, Y – непустые множества вещественных чисел, причём X ограничено сверху, а Y содержится в X . Докажите, что Y так же ограничено сверху и супремум Y меньше или равен супремума X .
24. Пусть A – множество чисел, противоположных по знаку числам из множества B . Докажите, что $\inf(A) = -\sup(B), \sup(A) = -\inf(B)$.
25. Доказать, что всякое числовое множество, ограниченное снизу, имеет инфимум.
26. Доказать, что всякое числовое множество, ограниченное сверху имеет супремум.
27. Доказать, что множество всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$, где m и n натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти супремум и инфимум этого множества.
28. Найти супремум и инфимум множества рациональных чисел r , удовлетворяющих неравенству $r^2 < 2$.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен проводится в третьем семестре. Оценка за экзамен складывается из оценки за практику (50%) и за теорию (50%). Практическая часть оценивается в течение семестра с учетом всех видов работ. Оценка по теоретической части ставиться на экзамене, оценка за экзамен ставиться как средняя оценка из оценок за практическую часть и оценок за теоретическую часть.

Вместо прохождения курса Основания математики студент может выбрать онлайн курс <https://www.lektorium.tv/mathlogic> Лекториум, онлайн курс Математическая логика и теория алгоритмов. Зюзьков В., соответствующий основным темам программы курса Основания математики. Прохождение итогового теста онлайн курса соответствует промежуточному контролю (экзамену).

Критерий оценки ответа на вопрос на экзамене:

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
означает неспособность студента математически верно сформулировать определения или результаты, требуемые в вопросе.	означает неспособность студента привести доказательства верно сформулированных результатов и неумение применить сформулированные определения и результаты к конкретной ситуации.	означает способность студента верно сформулировать результат и привести отдельные части доказательства или решения при не способности построить логическую цепочку доказательства (решения задачи) без дополнительных указаний.	означает способность студента привести доказательства верно сформулированных результатов или умение применить сформулированные определения и результаты к конкретной ситуации.

При альтернативном изучении онлайн курса выполнение не менее 50% тестовых заданий – оценка 3, выполнение не менее 70% тестовых заданий – оценка 4, успешное завершение курса (получение сертификата) – оценка 5.

Вопросы к экзамену

1. Парадоксы в теории множеств и в логике. Привести примеры.
2. Дать определения: высказывание, язык нулевого порядка, формула логики высказываний, ранг формулы. Определить операции над высказываниями (таблицами истинности). Определение булевой алгебры.
3. Дать определения: равносильные формулы, тавтология, противоречие. Сформулировать и доказать законы алгебры логики высказываний.
4. Дать определения: контрарная пара литер, элементарная конъюнкция, дизъюнкция, ДНФ, КНФ. Доказать теорему о приведении к ДНФ (КНФ). Сформулировать критерий тождественной истинности формулы через КНФ (критерий ТЛ через ДНФ).
5. Дать определение: формула α является логическим следствием множества формул Γ , $\Gamma \models \alpha$, $\emptyset \models \alpha$. Доказать теорему дедукции: $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \Gamma, \alpha \models \beta$.
6. Логика предикатов. Понятие предиката, область истинности предиката. Логические и кванторные операции над предикатами. Термы и формулы логики предикатов.
7. Ограниченные кванторы. Запись математических утверждений с помощью формул логики предикатов, рассказать о записи отрицания для высказывания с кванторами.
8. Определить операции над множествами. Сформулировать свойства операций, доказать одно из них.
9. Дать определение декартова произведения множеств, отношения на множестве. Дать определение отношения эквивалентности, отношение частичного нестрогого порядка, отношения линейного нестрогого порядка, отношения строго линейного порядка. Привести примеры каждого из отношений (с доказательством).
10. Дать определение однозначного отображения, инъективного отображения, сюръективного отображения, биективного отображения. Привести примеры не числовых отображений, которые являются инъекцией, но не сюръекцией, сюръекцией, но не инъекцией, не инъекцией и не сюръекцией, биекцией.
11. Равномощные множества. Счетные и несчетные множества. Свойства счетных множеств. Доказать счетность множества рациональных чисел.
12. Определение множества натуральных чисел через Аксиомы Пеано. Сформулировать принцип математической индукции. Доказать принцип вполнеупорядочения для множества натуральных чисел.
13. Множество целых чисел, множество рациональных чисел их свойства. Аксиома Архимеда и следствия из неё (доказательство).
14. Аксиомы теории вещественного числа (упорядоченное поле с аксиомой непрерывности). Недостаточность рациональных чисел для измерения длин отрезков и решения уравнений. Привести примеры с доказательством иррациональности чисел.
15. Определение множества вещественных чисел как множества бесконечных десятичных дробей. Отношение равенства на множестве вещественных чисел. Отношение порядка на множестве вещественных чисел. Вывести свойства порядка.
16. Доказать свойства вещественных чисел связанные с неравенствами.
17. Границы числовых множеств. Супремум, инфимум. Теорема о супремуме и инфимуме.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «IDo» - <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=10014>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Игошин В.И. Математическая логика: учебное пособие. / В.И. Игошин. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 399 с.
2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. URSS. 2017. — 304 с.

б) дополнительная литература:

1. — Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике. М.: Академия 2007 г. — 304 с.
2. Яценко И. В. Парадоксы теории множеств. М. МЦНМО 2014г. — 40с.
3. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. М. МЦНМО 2013г. — 152с.
4. Лихтарников Л.М. Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник - практикум и решения. СПб.: «Лань», 1998. — 288с.
5. П. Дж. Коэн. Теория множеств и континуум-гипотеза. — УРСС, 2010.
6. А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел. Основания теории множеств. — М.: Либ- роком, 2010.
7. Нечаев И.В. Числовые системы. М: Просвящение. 1975г. — 199с.

в) ресурсы сети Интернет:

<http://www.coursera.org/> – сайт обучающих курсов ведущих вузов мира

<https://etudes.ru/sketches/> сайт Математические этюды

<https://metaschool.ru/internet-olympiada.php> МетаШкола

<https://kvantik.com/> журнал Квантик

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –
<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Галанова Наталия Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, каф. Общей математики, доцент