

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан физического факультета  
  
С.Н. Филимонов  
«15» апреля 2021 г.



Рабочая программа дисциплины

**Нелинейные уравнения математической физики**

по направлению подготовки

**03.03.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**«Фундаментальная физика»**

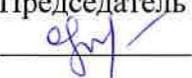
Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2021**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.03.03

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
  
О.Н. Чайковская

Председатель УМК  
  
О.М. Сюсина

Томск – 2021

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК 1 – Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 – Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений;

ИОПК 1.2 – Применяет физические и математические модели и методы при решении теоретических и прикладных задач.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить понятийный аппарат и методы анализа нелинейных уравнений математической физики и моделей физических явлений.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы нелинейной математической физики для решения практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Семестр 6, зачет.

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Дифференциальные уравнения, Теория функций комплексного переменного, Общая физика, Классическая механика, Квантовая механика, Методы математической физики.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины (модуля)**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 з.е., 72 часа, из которых:

– лекции: 32 ч.;

– практические занятия: 16 ч.;

– в том числе практическая подготовка: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам**

Тема 1. Нелинейные системы и их модели.

Линейные и нелинейные модели в физике. Канонический вид квазилинейного уравнения второго порядка.

Тема 2. Линейные и нелинейные тепловые явления.

Основные физические закономерности тепловых явлений. Задача Стефана о фазовом переходе. Распространение теплового возмущения в нелинейной среде от

мгновенного точечного источника. Понятие о тепловой волне. Пространственная локализация теплового возмущения. Понятие о режимах с обострением.

Тема 3. Системы реакционно-диффузионного типа.

Основные понятия о системах реакционно-диффузионного типа. Понятие об активаторе и ингибиторе, диссипативных структурах. Уравнения реакционно-диффузионного типа. Критерии устойчивости стационарного состояния в двухкомпонентной системе. Модель Гирера-Майнхарда. Модель «брюсселятор».

Тема 4. Линейные и нелинейные волны.

Волновое уравнение первого порядка. Решение уравнения методом характеристик. Понятие об ударной волне. Слабые ударные волны.

Тема 5. Элементы теории солитонов.

Понятие о солитонах. Примеры солитонных уравнений.

Тема 6. Задача рассеяния в квантовой механике.

Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера. Функции Иоста и их свойства. Дискретный спектр в задаче рассеяния. Решение обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера.

Тема 7. Метод обратной задачи рассеяния в теории солитонов.

Понятие об  $(L-A)$  –паре Лакса для нелинейного уравнения. Свойства нелинейного уравнения, обладающего  $(L-A)$  –парой. Пара Лакса для уравнения Кортевега – де Фриза. Эволюция данных рассеяния. Схема метода обратной задачи рассеяния для интегрирования нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза. Безотражательные потенциалы и солитонные решения. Общий вид  $N$ -солитонного решения уравнения Кортевега - де Фриза. Одно- и двух-солитонные решения. Солитоны в современной нелинейной физике.

## 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится с применением балльно-рейтинговой системы, включающей контроль посещаемости, результаты выполнения контрольных работ, заданий и тестов по материалам курса, и фиксируется в форме баллов (нарастающим итогом): посещаемость – максимальный балл 10, выполнение контрольных заданий – 40, тестов – 10. Контрольная точка проводится не менее одного раза в семестр.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

**Зачет в 6 семестре** проводится в письменной форме по экзаменационным билетам.

Результаты зачета определяются оценкой «зачтено» исходя из результатов ответов на зачете (40%) и текущей аттестации в течение семестра (60%) в соответствии с балльной шкалой оценивания: количество набранных баллов более 59 — «зачтено», менее 59 баллов — «не зачтено».

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой тест из 2-х основных вопросов, проверяющих сформированность компетенции ОПК 1 в соответствии с индикатором ИОПК 1.1, ИОПК 1.2. Ответы даются в развернутой форме, включая практические задачи.

Вторая часть содержит 2 дополнительных вопроса из списка контрольных вопросов по курсу (приведен в разделе 11), проверяющих соответствие индикатору достижения компетенции ИОПК 1.1, ИОПК 1.2. Ответ на вопрос второй части дается в краткой форме, включающей краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Объясните понятия «активатор» и «ингибитор». При каком соотношении параметров активатора и ингибитора в реакционно-диффузионной системе может образовываться диссипативная структура?

Вопрос 2. Задача. В модели  $\tau_u u_t = l^2 \Delta u - q(u, v, A)$ ,  $\tau_v v_t = L^2 \Delta v - Q(u, v, A)$  с кубической нелинейностью  $q(u, v, A) = u^3 - u - v$ ,  $Q(u, v, A) = u + v - A$  найдите стационарные однородные решения.

Дополнительные вопросы.

Вопрос 1. Объяснить физический смысл условия Стефана на границе раздела твердой и жидкой фаз.

Вопрос 2. Объяснить, из каких свойств вычисляется вронскиан функций Иоста  $W(\varphi(x, k), \bar{\varphi}(x, \bar{k}))$  и найти его значение.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=2425>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

Перечень вопросов, выносимых на зачет.

Перечень выносимых на зачет вопросов по темам 1,2.

1. Классификация квазилинейного уравнения II порядка с двумя независимыми переменными. Формулы преобразования коэффициентов при вторых производных. Типы уравнения II порядка.
2. Записать систему уравнений, определяющих переход к канонической форме квазилинейного уравнения II порядка, если коэффициенты при вторых производных зависят от искомой функции. В чем отличие от случая линейного уравнения?
3. Получить формулу для коэффициента  $\bar{a}_{11}$  в канонических переменных.
4. Получить условие Стефана на границе раздела твердой и жидкой фаз.
5. Сформулировать задачу Стефана о фазовом переходе.
6. Построить автомодельное решение в задаче Стефана.
7. Найти уравнение движения фронта раздела фаз в задаче Стефана.
8. Задачи с внутренней нелинейностью. Задача о распространении тепла в среде с коэффициентом теплопроводности, степенным образом зависящим от температуры.
9. Получить уравнение движения фронта тепловой волны в среде со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.

Показать, что в среде с нелинейным коэффициентом теплопроводности  $k = k_0 u^\sigma$  в пределе  $\sigma \rightarrow 0$  решение нелинейного уравнения теплопроводности переходит в решение линейной задачи.

Перечень выносимых на зачет вопросов по теме 3.

Система уравнений типа «реакция-диффузия». Понятие об активаторе и ингибиторе.

Постановка задачи об образовании диссипативных структур.

1. Получить условия нарушения устойчивости в задаче типа «реакция-диффузия».
2. Получить условия неустойчивости для осциллирующих флуктуаций. При каком условии в среде всегда возникает осциллирующая во времени флуктуация?
3. Условия возникновения аperiodических во времени флуктуаций.
4. Найти стационарное решение и условия неустойчивости в модели Гирера-Майнхарда.
5. Найти стационарное решение в модели брюсселятора. Найти критическое значение управляющего параметра и малого параметра.

Перечень выносимых на зачет вопросов по теме 4.

1. Дать определение гиперболической и диспергирующей волн.
2. Найти решение уравнения  $u_t + c(u) u_x = 0$  методом характеристик.
3. Объяснить явление опрокидывания фронта волны, распространяющегося в нелинейной среде. Записать условие опрокидывания фронта волны.

Перечень выносимых на зачет вопросов по темам 5-7.

1. Сформулировать постановку задачи о рассеянии на потенциале  $u(x)$  для одномерного квантовомеханического уравнения Шредингера.
  2. Объяснить квантовомеханический смысл функций  $a(k)$ ,  $b(k)$  в задаче рассеяния. Доказать соотношение  $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1$ ,  $\text{Im } k=0$ .
  3. Вычислить вронскиан функций Иоста  $(\varphi(x, k), \bar{\varphi}(x, \bar{k}))$ .
  4. Записать интегральное уравнение, определяющее функцию Иоста  $\varphi(x, k)$  ( $\chi_+(x, k) = e^{ikx}\varphi(x, k)$ ) и показать, что  $\chi_+(x, k)$  аналитична в верхней полуплоскости  $k$ .
  5. Доказать, что точки верхней полуплоскости  $k$ , в которых  $a(k)$  обращается в нуль, являются точками дискретного спектра для одномерного уравнения Шредингера  $-\varphi'' + u(x)\varphi = k_0^2\varphi$ .
  6. Сформулировать постановку обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера в квантовой механике.
  7. Понятие о данных рассеяния. Вывод уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко.
  8. Получить формулу, выражающую потенциал  $u(x)$  в обратной задаче рассеяния. Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ).
  9. Понятие об (L-A)-паре для нелинейного уравнения. (L-A)-пара для уравнения КдФ.
  10. Показать, что если  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению КдФ, то дискретные собственные значения уравнения Шредингера  $-\psi'' + u(x, t)\psi = \lambda\psi$  не зависят от  $t$ .
  11. Понятие об эволюции данных рассеяния для потенциала  $u(x, t)$ , удовлетворяющего уравнению КдФ. Уравнения Гарднера-Грина-Крускала-Миуры.
  12. Схема интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния.
  13. Понятие о безотражательном потенциале в обратной задаче рассеяния. Решения уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко для безотражательного потенциала.
  14. N-солитонное решение уравнения КдФ. 1-солитонное решение.
- в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.
1. Линейные и нелинейное уравнение общего вида. Особенности нелинейных уравнений и их решений. Классификация квазилинейных уравнений.
  2. Нелинейные тепловые явления. Задача Стефана о фазовом переходе. Распространение теплового возмущения в нелинейной среде от мгновенного точечного источника. Режимы с обострением.
  3. Системы типа реакция-диффузия. Критерии устойчивости стационарного состояния в модели Гирера-Майнхарда и в модели «брюсселятор».
  4. Линейные и нелинейные волны. Распространение волн в средах с дисперсией.
  5. Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера.
  6. Метод обратной задачи рассеяния в теории солитонов. Пара Лакса для уравнения Кортевега - де-Фриза. Уравнения эволюции данных рассеяния.
  7. Солитонные решения и их свойства.
- г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студента включает:

- углубленное теоретическое изучение разделов курса при подготовке к лекционным и практическим занятиям;
- подготовку к обсуждению материала, в том числе самостоятельный поиск необходимых источников информации, включая научно-образовательные ресурсы сети Интернет;
- подготовку к зачету.

Вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение.

1. Классификация двумерной квазилинейной системы первого порядка.
2. Распространение тепла в нелинейной среде с переносом массы.
3. Реакционно-диффузионное уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского- Пискунова.

4. Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка.
5. Уравнение Бюргерса и его частные решения.
6. Уравнение в вариациях нелинейного волнового уравнения и его дисперсионное соотношение.
7. Теория возмущений солитонов для уравнения КдФ.

Темы для рефератов и учебно-методическая литература для самостоятельной работы по разделам дисциплины «Нелинейные уравнения математической физики»:

Тема 1. Распространение тепла в нелинейной среде с учетом релаксации теплового потока.

Литература:

- 1) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп./ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
- 2) Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики./Отв. ред. Акад. А.А. Самарский, чл.-корр. АН РАН С.П. Курдюмов, к.ф.-м.н. В.И. Мажукин. – М.: Наука, 1987. – 280 с.
- 3) Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики/ Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1966. – 367 с.
- 4) Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

Тема 2. Нелинейные волны в диспергирующей среде.

Литература:

- 1) Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 323 с.
- 2) Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи/ М. Абловиц, Х.Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
- 3) Додд Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения/ Р. Додд [и др.]. – М.: Наука, 1988. – 694 с.
- 4) Гончаренко А. М. Пучки и солитоны. – Минск.: Издательский дом “Белорусская наука”. 2014. 127 с. Электронное издание. Доступ: <http://www.litres.ru/a-m-goncharenko/opticheskie-gaussovy-puchki-i-solitony/>
- 5) Кившарь Ю.С. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов/ Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.
- 6) Soliton theory and its applications./Ed . Gu Chaohao. Berlin, Heidelberg, Toronto, London, Paris, Tokio: – Springer, 1991. – 403 p.

- 7) Солитоны/ Ред. Буллаф Р., Кодри Ф./пер.с англ. Дубровина Б.А., Кричевера И.М., Манакова С.В. Под. Ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – 408 с.

Тема 3. Односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера.

Литература:

- 1) Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 323 с.
- 2) Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи/ М. Абловиц, Х.Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
- 3) Захаров В.Е. Теория солитонов: Метод обратной задачи/ В.Е. Захаров [и др.]. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
- 4) Додд Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения/ Р. Додд [и др.]. – М.: Наука, 1988. – 694 с.
- 5) Солитоны/ Ред. Буллаф Р., Кодри Ф./пер.с англ. Дубровина Б.А., Кричевера И.М., Манакова С.В. Под. Ред. С.П. Новикова. М.: Мир, 1983. 408 с.
- 6) Калоджеро Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений/ Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М.: Наука, 1988. – 469 с.
- 7) Тахтаджян Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов/ Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986. – 527 с.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. Учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп./ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622с.
3. Захаров В.Е. Теория солитонов: Метод обратной задачи/ В.Е Захаров [и др.]. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
4. Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи/ М. Абловиц, Х.Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
5. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. – 694 с.
6. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. – 323 с.
7. Калоджеро Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений/ Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М.: Наука, 1988. – 469 с.
8. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1977. – 331 с.
9. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
10. Альперин М.М. Введение в физику двухуровневых систем/ М.М. Альперин [и др.]. – Киев: Наукова Думка, 1987.
11. Шаповалов А.В. Введение в нелинейную физику (учебное пособие). – Томск: Изд-во ТПУ. 2002. – 129 с.
12. Шаповалов А.В. Задачи по курсу "Введение в нелинейную физику" (учебное пособие). – Томск: Изд-во ТПУ. 2002. – 47 с.
13. Гончаренко А. М. Пучки и солитоны. – Минск.: Издательский дом “Белорусская наука”. 2014. 127 с. Электронное издание. Доступ: <http://www.litres.ru/a-m-goncharenko/opticheskie-gaussovy-puchki-i-solitony/>
14. Кившарь Ю.С. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов/ Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.

б) дополнительная литература:

1. 3) Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики/ Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1966. – 367 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964.
3. Тахтаджян Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов/ Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
4. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур. М.: Наука, 1998.
5. Кернер Б.С., Осипов В.В. Самоорганизация в активных распределенных средах. // Успехи физических наук. 1990. Т.160. Вып. 9. С.1-73.
6. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики./ Ред. Акад. А.А. Самарский, чл.-корр. С.П. Курдюмов, В.И. Мажукин. М.: Наука, 1987. – 280 с.

в) ресурсы сети Интернет:

– Спецкурс МГУ по теории нелинейных волн

<http://qopt.org/speckurs/nlwaves/nlwaves.htm>

Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения

<https://ufn.ru/ru/articles/2007/4/e/references.html>

Солитоны

<https://lls.nsu.ru/pdfs/solitons2.pdf>

<http://www.nkj.ru/archive/articles/7337/>

Лекция В.Е. Захарова

<https://www.youtube.com/watch?v=lpr1f0xPvtk>

Оптические солитоны

<http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/890.html>

[http://laser-portal.ru/content\\_620](http://laser-portal.ru/content_620)

### **13. Перечень информационных технологий**

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTeX;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –

<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –

<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

– ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

– ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате, оснащенные системой («Актру»).

### **15. Информация о разработчиках**

Шаповалов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, заведующий кафедрой.