

МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОП

  
Гензе Л.В.

" 31 " 08 2021 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Вариационное исчисление и методы оптимизации**

Закреплена за кафедрой Учебный план	<i>Математического анализа и теории функций</i>
Форма обучения	<i>Математика – 01.03.01, Программа «Основы научно-исследовательской деятельности в области математики» очная</i>
Общая трудоёмкость	<i>общая трудоёмкость в зачетных единицах 4 з.е.</i>
Часов по учебному плану в том числе:	<i>общая трудоёмкость в часах 144 ч.</i>
аудиторная контактная работа	<i>77,85 часа в период теоретического обучения (в том числе 36 часов лекций, 36 часов практических занятий, 3,6 часа консультации).</i>
самостоятельная работа	<i>50,4 часа</i>
Вид(ы) контроля в семестрах экзамен (подготовка к экзамену и процедура экзамена 36 часов)	<i>7 семестр</i>

Программу составил(и)

доцент, к.ф.-м.н. Малютина А.Н

Рецензент (ы) доцент, к.ф.-м.н. Соколов Б.В

Рабочая программа дисциплины Вариационное исчисление и методы оптимизации и система индивидуальных заданий, а также система рефератов и сочинений по курсу разработана в соответствии с СУОС НИ ТГУ:

*Самостоятельно устанавливаемый образовательный стандарт НИ ТГУ по направлениям подготовки 01.03.01 – Математика (Утвержден Ученым советом НИ ТГУ, протокол от 27.03.2019 №03)*

Рабочая программа одобрена на заседании УМК/Совета программы

Протокол от 30 января 2020 № 1

## 1.Цель освоения дисциплины

фундаментальная подготовка и формирование прочных теоретических знаний и практических навыков для возможности дальнейшего развития Вариационное исчисление и методы оптимизации и использование его в прикладных задачах.

## 2. «Место дисциплины в структуре ОПОП

Относится к базовой части ООП, обязательна для изучения.

Пререквизиты<sup>1</sup> дисциплины/модуля для изучения курса достаточно иметь некоторые знания, умения и навыки, формируемые курсами «Математического анализа», «Функционального анализа», «Уравнений математической физики», «Геометрии», «Алгебры», «Дифференциальных уравнений».

Постреквизиты<sup>2</sup> дисциплины/модуля «Дополнительные главы математического анализа» (для выбравших специализацию в рамках направления «Математический анализ»), НИР, выполнение и защита ВКР.

## 2. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины/модуля

Таблица 1

Компетенция	Индикатор компетенции <b>ИОПК 1.1; ИОПК 1.2; ИОПК 1.3; ИОПК 3.1; ИОПК 3.2; ИОПК 3.3</b>	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения <sup>3</sup> по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций)
<b>ОПК-1</b> Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики.	ИОПК-1.1 – Демонстрирует навыки работы профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.  ИОПК-1.2 – Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом	<b>ОР-1.1.1</b> Имеет навыки работы с профессиональной литературой по дисциплине Вариационное исчисление и методы оптимизации для успешной учебной деятельности.  Уметь решать задачи вычислительного и теоретического характера в области Вариационного исчисления и методов оптимизации, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, доказывать, как известные утверждения, так и родственные им новые.

<sup>1</sup> В случае отсутствия пререквизитов дисциплины/модуля указывается - нет.

<sup>2</sup> В случае отсутствия постреквизитов дисциплины/модуля указывается - нет.

<sup>3</sup> Результаты обучения могут быть сформулированы в виде конкретных результатов обучения или дескрипторов: знать; уметь; владеть.

	<p>основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.</p> <p>ИОПК-1.3 – Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.</p>	<p>Владеть разнообразными методами Вариационное исчисление и методы оптимизации, подбирая и сочетая их при анализе конкретных теоретических и прикладных задач.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- выполнять операции Вариационного исчисления и методов оптимизации;</li> <li>- уметь строить математические модели и классифицировать их</li> <li>- анализировать функции, имеющие производные по Фреше,</li> <li>- Уметь решать простейшие задачи, задачу Больца, изопериметрические задачи, задачи Лагранжа и задачи оптимального управления.</li> <li>...</li> </ul> <p>Владеть знанием основных определений и основных свойств гомоморфизмов, а также формулировки наиболее важных утверждений, некоторых стандартных методов их доказательств.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- собственное поле;</li> </ul> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- необходимые и достаточные условия экстремума</li> <li>- основы теории Гамельтона-Якоби;</li> <li>- краевые и начальные задачи;</li> </ul> <p style="text-align: right;">7</p>
--	---	--

### 3. Структура и содержание дисциплины/модуля

#### 3.1. Структура и трудоемкость видов учебной работы по дисциплине/модулю

Общая трудоемкость дисциплины/модуля составляет 108час 4 з.е. \_\_ зачетные единицы, \_\_ часа.

Таблица 2

Вид учебной работы	
<b>Общая трудоемкость</b>	144
<b>Контактная работа:</b>	72+2.3
Лекции (Л):	36
Практические занятия (ПЗ)	36
Лабораторные работы (ЛР)	-
Семинарские занятия (СЗ)	-
Групповые консультации	3,6
Индивидуальные консультации	-
Промежуточная аттестация	2.25
<b>Самостоятельная работа обучающегося<sup>4</sup>:</b>	50.4
Контрольная точка1 (индивидуальные задания: 1) экстремумы, 2) производные: вариация по Лагранжу, производная по Гато, Фреше,... 3) простейшая задача, 4) задача Больца,	

<sup>4</sup> Приводятся формы самостоятельной работы обучающегося, реализуемые в рамках изучения дисциплины.

- изучение учебного материала, публикаций по теме дисциплины	28	
- написание реферата	2.25	
- написание эссе	2.25	
- выполнение контрольной работы/контрольных заданий (кейс)	15.25	
- подготовка индивидуальных заданий	3.6	
- подготовка к практическим занятиям	3.6	
- подготовка к текущему контролю	4.	
- подготовка к экзамену	6.7	
<b>Вид промежуточной аттестации (зачет, зачет с оценкой, экзамен)</b>	<b>Зачет с оценкой</b>	

### 3.2. Содержание и трудоемкость разделов дисциплины/модуля

Таблица 3

Код занятия	Наименование разделов и тем и их содержание	Вид учебной работы, занятий, контроля <sup>5</sup>	Всего (час.)	Литература <sup>6</sup>	Код (ы) результата(ов) обучения <sup>7</sup>
	<b>Раздел 1. Наименование</b>				
1.1.	1. Тема занятия Предмет вариационного исчисления. Основные понятия. План. Литература. Формализация экстремальных задач.	Лекции+пр. занятие+СРС	2+2+2		
1.2.	Тема занятия Элементы функционального и выпуклого анализа. Определение вариации по Лагранжу производных по направлению, Гато, Фреше. Основные леммы вариационного исчисления и их применение	Лекция+пр.+СРС Практики	2+2 +4		
1.3	Теорема о полном дифференциале. Основные теоремы дифференциального исчисления	Лекция+пр.+СРС	2+2+3		
1.4.	Форма СРС контрольная точка 1: индивидуальные задания 1) экстремумы, 2) производные: Вариация	СРС			

<sup>5</sup> Столбец заполняется в соответствии с таблицей 3.

<sup>6</sup> Литература (заполняется при необходимости из общего перечня литературы по дисциплине).

<sup>7</sup> Коды результатов обучения указываются в соответствии с таблицей 1.

	по Лагранжу, проиводная по Гато, Фреше, строгая, 3) Простейшая задача, 4) задача Больца; рефераты, сочинение. <sup>8</sup>				
	Текущий контроль успеваемости <sup>9</sup>				
	<b>Раздел 2. Наименование</b>				
2.1.	Тема занятия Простейшая задача классического вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Правило множителей Лагранжа и теорема Люстерника. Теорема о касательном пространстве.	Лекции+пр+СРС	2+2+6		
2.2.	Тема занятия Необходимые условия в задаче Больца. Условия трансверсальности.	Лекция+пр.+СРС	2+2+3		
	Условия Вейрштрасса	Лекция+пр.+СРС	2+2+2		
	Поле экстремалей. Геометрическое				
	Условие Якоби.	Лекция+пр.+СРС	2+2+2		
	Изопериметрическая задача правила решения пример.	Лекция+пр.+СРС			
	Задачи со старшими производными. Необходимые и	Лекция+пр.+СРС	2+2+2		

<sup>8</sup> Форма СРС указывается в соответствии с п. 3.1.

<sup>9</sup> Текущий контроль успеваемости (периодичность, формат/вид/метод оценивания) определяется исходя из целей, задач и планируемых результатов обучения.

	достаточные условия				
	Задачи с подвижными концами. Необходимые и достаточные условия	Лекция+пр.+СРС	2+2+3		
	Задача Лагранжа и основная задача оптимального управления. Необходимые условия в задаче Лагранжа.	Лекция+пр.+СРС	2+2+3		
	Терема Эйлера-Лагранжа. Правила решения. Примеры	Лекция+пр.+СРС	2+2+4		
	Задачи оптимального управления: Задача Лагранжа.	Лекция+пр.+СРС	2+2+4		
	Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа. Примеры	Лекция+пр.+СРС	2+2+3		
	Теория Гамильтона-Якоби.	Лекция+пр.+СРС	2+2+4		
	Задачи оптимального управления:	Лекция+пр.+СРС	2+2+2.7		
	Принцип Понтрягина.	Лекция+пр.+СРС	2+2+2.7		
2.3.	<i>Форма</i> СРС контрольная точка 2: 5) изопериметрическая задача, 6) задача Лагранжа, 7) задача оптимального управления; Рефераты, Сочинения	СРС			
	...				
	...				
	Промежуточная аттестация				

#### 4. Образовательные технологии, учебно-методическое и информационное обеспечение для освоения дисциплины/модуля

Контрольная точка 1 (Индивидуальные задания:  
1) Экстремумы, 2) Производные: Вариация по Лагранжу, производная по Гато, Фреше, строгая дифференцируемость, 3) Простейшая задача, 4) Задача Больца)

рефераты: 1. историческая справка: задача Дидоны. 2. Геометрические задачи. 3. задача о брахистохроне. 4. Выпуклые функции. 5. Формализация Экстремальных задач. 6. Производные. 7. Импликация. 8. основные леммы ВИ и мет.опт. 9. Основные теоремы дифференциального исчисления в ВИ и мет.опт. 10. Уравнение Эйлера и методы его решения. 11. Примеры экстремалей простейшей задачи. 12. Пример Гильберта.

Контрольная точка 2 (5) Изопериметрическая задача, 6) Задача Лагранжа, 7) задача оптимального управления)

Рефераты: 1. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании. 2. Выпуклый анализ и теория экстремальных задач. 3. Задача Больца.необходимые условия. 4. Задачи с подвижными концами. 5. Необходимые и достаточные условия высших порядков.6. Теорема Боголюбова. 7. Теория поля. Уравнение Гамильтона-Якоби. 8. Принцип Лагранжа для изопериметрических задач. 9. Необходимые условия высших порядков и достаточные условия. 10. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа. 11. Принцип Лагранжа для ляпуновских задач. 12. Принцип Максимума Понтрягина. 13. Достаточные условия в классическом вариационном исчислении. 14. Игольчатые Вариации.

Сочинения можно писать по теме рефератов или выбирать самим.

#### 4.1. Литература и учебно-методическое обеспечение

##### V. Учебно-методическое обеспечение курса

Рекомендуемая литература (основная)

1. Алексеев В.М., Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимальное управление. М., 1979. – 432 с.
2. Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1989. – 197 с.

3. Алексеев В.М., Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984. – 287 с.

Дополнительная литература.

4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1968. 408 с.

5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.Н. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

6. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М., 1961. 228 с.

7. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн., 1981. 350 с.

#### **16. Примерный перечень вопросов к экзамену.**

1. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами. Формализация задач. Примеры.
2. Определения производных. Производная по направлению, вариация по Лагранжу. Производная по Гато.
3. Производные Фреше. Строгая дифференцируемость.
4. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.
5. Теорема о среднем и ее следствия.
6. Лемма о нетривиальности аннулятора.
7. Лемма об аннуляторе ядра регулярного оператора.
8. Изопериметрические задачи. Необходимые условия экстремума.
9. Конечномерные теоремы об обратной и неявной функции. Теорема Люстерника.
10. Теорема о касательном пространстве.
11. Элементы выпуклого анализа. Определения. Теорема Юнга-Фенхеля-Моро.
12. Основные формулы субдифференциального исчисления. Теорема Моро-Рокафеллера.
13. Выпуклые функции. Их свойства. Операции над ними.
14. Элементы теории выпуклых множеств и функций.
15. Выпуклые множества, достаточные условия выпуклости множеств, проекция точки на выпуклое множество,
16. теоремы отделимости.
17. Выпуклые функции и их свойства. Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды выпуклых функций.
18. Выпуклое программирование. Постановка задачи выпуклого программирования и ее свойства.
19. Необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.
20. Функция Лагранжа. Достаточные условия регулярности задачи.
21. Теорема Куна-Таккера (доказательство - для гладкой задачи с ограничениями типа неравенства).
22. Интерпретация теоремы Куна-Таккера.
23. Обобщения теоремы Куна-Таккера.
24. Выпуклые задачи. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании
25. Задачи выпуклого программирования. Правило множителей Лагранжа.
26. Полунепрерывные снизу и полукompактные функции.
27. Различные эквивалентные определения полунепрерывных снизу функций.
28. Ограниченность снизу любой полунепрерывной снизу функции.
29. Опорные функции и теорема Минковского.
30. Функция Вейерштрасса и условия ее выпуклости.

31. Сопряженные функции и их свойства.
32. Преобразование Юнга-Фенхеля-Моро. Теорема Фенхеля-Моро.
33. Экономическая интерпретация.
34. Свойства сопряженных функций.
35. Субдифференциальное исчисление.
36. Понятие субдифференциала.
37. Выпуклость и замкнутость субдифференциала в нормированном пространстве.
38. Субдифференциал нормы.
39. Теорема Моро-Рокафеллора.
40. Теорема о субдифференциале суперпозиции
41. Теорема Ферма о локальном минимуме.
42. Гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Общий случай.  
Постановка задачи. Необходимое условие экстремума.
43. Выпуклые задачи. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании.
44. Теорема Куна-Таккера (субдифференциальная форма).
45. Теория двойственности экстремальных задач.
46. Задача Больца. Необходимые условия экстремума.
47. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума.  
Интегралы уравнения Эйлера.
48. Изопериметрические задачи. Необходимые условия экстремума.
49. Теорема Крейна - Мильмана.
50. Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина.
51. . Постановка задач. Связь с задачами вариационного исчисления.
52. Принцип максимума Понтрягина и его применения.
53. Связь принципа максимума с задачами вариационного исчисления.
54. Примеры.
55. Задача Лагранжа. Теорема Эйлера-Лагранжа.
56. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями.
57. Пример.

#### **4.2. Базы данных и информационно-справочные системы, в том числе зарубежные**

- <http://e-science.sources.ru/> – портал естественных наук
- <http://www.coursera.org/> – сайт обучающих курсов ведущих вузов мира
- <https://ocw.mit.edu/index.htm> – сайт открытых курсов MIT

#### **4.3. Перечень лицензионного и программного обеспечения**

*операционные системы:*

Microsoft Windows 7, Microsoft Windows 10

*офисные и издательские пакеты* Microsoft Office 2010

*средства разработки приложений и СУБД* Microsoft Visual Studio 2015, Intel Fortran/C/C++ Compiler 15

*математические пакеты* РТС Mathcad 15, Maple 15, Matlab R2015;

#### **4.4. Оборудование и технические средства обучения**

Для проведения лекционных занятий используются классические аудитории с доской, проектором и компьютером с предустановленным офисным пакетом Microsoft Office 2010. Для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов используются аудитории 314, 316, 319 оснащенные:

## Аудитории №№314, 316

Компьютеры (13 шт.)

- LCD монитор BENQ 21.5"
- Процессор Intel core i5-2400, тактовая частота 3.40 ГГц
- Оперативная память: 4 Гб
- Жесткий диск (винчестер) 500 Гб
- Видеокарта Nvidia GTS 450

## Аудитория № 319

Компьютеры: (13 шт.)

- Монитор LG 24"
- Процессор Intel Core i7-4790 3.60GHz
- Оперативная память 16 Гб
- Жесткий диск 1 Тб

### **5. Методические указания обучающимся по освоению дисциплины/модуля**

Для успешного освоения материала студентам необходимо пользоваться источниками, информационными системами и базами данных, которые представлены в списке литературы. Самостоятельная работа студентов состоит в проработке лекционного материала, материала с практических занятий и самостоятельного изучения дополнительных вопросов, более глубокого анализа лекций с помощью дополнительной литературы. Студенты должны внимательно относиться к подготовке к коллоквиумам и экзамену, ответственно подходить к самостоятельной работе и уверенно отвечать на вопросы тестов текущего контроля.

### **6. Преподавательский состав, реализующий дисциплину**

доцент, к.ф.-м.н. Малютина А. Н,

### **7. Язык преподавания**

Русский