

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета


С.Н. Филимонов

«15» апреля 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Фрактальные структуры

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная физика»

Форма обучения
Очная

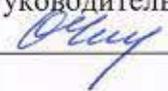
Квалификация
Бакалавр

Год приема
2021

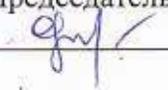
Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.ДВ.01.01.06

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП


О.Н. Чайковская

Председатель УМК


О.М. Сюсина

Томск – 2021

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

- ОПК 2 – Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;
- ПК 1 – Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 2.2 – Анализирует и интерпретирует экспериментальные и теоретические данные, полученные в ходе научного исследования, обобщает полученные результаты, формулирует научно обоснованные;

ИПК 1.1 – Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования .

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить понятийный аппарат представлений о фрактальных структурах и методы фрактального анализа физических систем и моделей физических явлений.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы фрактального анализа для решения практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 6, зачет.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Дифференциальные уравнения, Теория вероятностей, Теория функций комплексного переменного, Общая физика, Классическая механика, Методы математической физики, Практикум по символьным вычислениям.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 з.е., 72 часа, из которых:

– лекции: 16 ч.;

–практические занятия: 16 ч.;

– в том числе практическая подготовка: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Представления о фрактальных объектах.

Современные представления, используемые для описания реальных объектов, обладающих сложной геометрией. Примеры фрактальных множеств. Триадное канторово множество, кривая Коха, множества Серпинского.

Тема 2 Меры и размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Множества и функции. Метрическое пространство. Меры. d - мера Хаусдорфа. Размерность Хаусдорфа-Безиковича. Свойства меры Хаусдорфа и размерности Хаусдорфа-Безиковича. Практическое вычисление размерности. Клеточная размерность. Вычисление клеточной размерности для простейших фракталов.

Тема 3. Самоподобные объекты. Размерность подобия.

Понятие о самоподобии множеств. Ограниченные множества. Размерность подобия триадного канторова множества. Размерности подобия простейших фракталов. Метрика Хаусдорфа. Сжимающие отображения. Составные отображения. Неподвижная точка сжимающего составного отображения и фрактальное множество. Построение обобщенных канторовых множеств.

Тема 4. Информационные свойства фракталов.

Информационные свойства фракталов. Понятие об информационной энтропии. Принцип максимума энтропии. Информационная энтропия фракталов.

Тема 5. Элементы теории мультифрактального анализа.

Мультифрактальная мера. Показатель массы. Мультифрактальный спектр. Размерности Реньи. Биномиальный мультипликативный процесс.

Тема 6. Примеры применения фрактального и мультифрактального анализа

Мультифрактальный анализ оптических спектров. Параметр разветвления. Связность. Лакунарность. Метод скользящей ячейки. Элементы фрактального анализа на канторовых множествах.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится с применением балльно-рейтинговой системы, включающей контроль посещаемости, результаты выполнения контрольных работ, заданий и тестов по материалам курса, и фиксируется в форме баллов (нарастающим итогом): посещаемость – максимальный балл 10, выполнение контрольных заданий – 40, тестов – 10. Контрольная точка проводится не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет в 6 семестре проводится в письменной форме по экзаменационным билетам.

Результаты зачета определяются оценкой «зачтено» исходя из результатов ответов на зачете (40%) и текущей аттестации в течение семестра (60%) в соответствии с балльной шкалой оценивания: количество набранных баллов более 59 — «зачтено», менее 59 баллов — «не зачтено».

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой тест из 2-х основных вопросов, проверяющих сформированность компетенции ОПК 2 в соответствии с индикатором ИОПК 2.2.

Ответы даются в развернутой форме, включая практические задачи.

Вторая часть содержит 2 дополнительных вопроса из списка контрольных вопросов по курсу (приведен в разделе 11), проверяющих сформированность компетенции ПК 1.1 и соответствие индикатору достижения компетенции ИПК 1.1. Ответ на вопрос второй части дается в краткой форме, включающей краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов.

Вопрос 1. Описать алгоритм построения триадного канторова множества. Показать, что канторово множество равномощно континууму. В чем особенность геометрии канторова множества.

Вопрос 2. Задача. Вычислить размерность подобия кривой Коха и салфетки Серпинского.

Дополнительные вопросы.

Вопрос 1. Покажите, что d - мера Хаусдорфа M_d неотрицательна, мера пустого множества равна нулю.

Вопрос 2. Объясните понятие фрактальной кривой. Приведите пример кривой Вейерштрасса.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=81>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

Перечень вопросов, выносимых на зачет.

Перечень вопросов по темам 1-2.

1. Способ построения триадного канторова множества, кривой Коха и салфетки Серпинского.
2. Покажите, что в триадное канторово множество входят не только концы выброшенных интервалов. Найдите длину выброшенных интервалов (на самостоятельное изучение).
3. Объясните понятия: алгебраическая размерность линейного пространства, размерность дифференцируемого многообразия, топологическая размерность.
4. Дайте следующие определения и приведите примеры: диаметр множества в пространстве R^n , понятие « d - мера Хаусдорфа» множества A , борелевские множества в пространстве R^n .
5. Покажите, что d - мера Хаусдорфа M_d неотрицательна, мера пустого множества равна нулю.
6. Покажите, что d - мера Хаусдорфа M_d монотонно не убывает на системе борелевских множеств. Покажите, что d - мера Хаусдорфа M_d аддитивна.
7. Покажите, что мера Хаусдорфа обладает свойством инвариантности относительно масштабных преобразований (на самостоятельное изучение).
8. Объясните понятия: условие Гёльдера и условие Липшица. Удовлетворяет ли изометрия этим условиям? Дайте определение би-липшицева отображения и приведите пример.
9. Является ли мера Хаусдорфа M_d непрерывной функцией параметра d ? Каков характер этой зависимости?
10. Объясните понятие: размерность Хаусдорфа-Безиковича некоторого множества A .
11. Может ли мера Хаусдорфа M_d данного множества A принимать конечное значение?
12. Вычислите размерность Хаусдорфа-Безиковича триадного канторова множества.
13. Вычислите размерность Хаусдорфа-Безиковича кривой Коха.
14. В чем состоят трудности вычисления размерности Хаусдорфа-Безиковича? В чем заключается основной принцип определения упрощенных видов размерностей? Приведите примеры упрощенных видов фрактальных размерностей.
15. Чем обусловлена необходимость введения двух размерностей: верхней \bar{s} и нижней \underline{s} ? Что означает их равенство и различие?
16. Сформулируйте общие требования, которым должна удовлетворять размерность множества при любом способе измерения этого множества.
17. Объясните понятие клеточной размерности. Найдите величину этой размерности для ковра Серпинского.

18. Определите фрактальное множество: «губка Серпинского» и найдите значение фрактальной размерности для этого множества (на самостоятельное изучение).
19. Каковы недостатки в определении клеточной размерности? Объясните понятие модифицированной клеточной размерности.
20. Дайте определение упаковочной размерности. Какими свойствами обладает эта размерность? (на самостоятельное изучение).
21. С каким значением модифицированной размерности (верхним или нижним) совпадает упаковочная размерность? Дайте объяснение.
22. Объясните понятие кластерной размерности. Что такое диффузно-ограниченная агрегация? Какими моделями описывается данное явление?
23. Объясните понятие фрактальной кривой. Приведите пример кривой Вейерштрасса.
24. Объясните алгоритм практического вычисления клеточной размерности фрактального множества.
25. Объясните алгоритм практического вычисления кластерной размерности фрактального множества.
26. Объясните алгоритм практического вычисления корреляционной клеточной размерности фрактального множества (на самостоятельное изучение).

Перечень вопросов по темам 3-4.

1. Самоподобные множества и их свойства. Коэффициент подобия.
2. Определение преобразования подобия, размерности подобия самоподобного множества. Вывод формулы для определения размерности подобия.
3. Вычисление размерности подобия для салфетки Серпинского и губки Серпинского (на самостоятельное изучение).
4. Полное метрическое пространство. Сжимающие отображения. неподвижная точка сжимающего отображения.
5. Как определяется метрика Хаусдорфа и каковы ее свойства?
6. Дайте определение понятия ε -окрестности множества. Приведите пример.
7. Как применяется принцип сжимающих отображений для построения инвариантных множеств?
8. Сформулируйте понятие самоподобного множества в терминах сжимающих отображений относительно метрики Хаусдорфа.
9. Сформулируйте теорему о сжимающих отображениях относительно метрики Хаусдорфа. Докажите эту теорему.
10. Объясните понятие «размерность подобия отображения». Покажите, что если $0 \leq \rho_i \leq 1$ то существует единственное действительное число $D > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^q \rho_i^D = 1.$$
11. Объясните понятие условия открытого множества. Чем обусловлено введение этого понятия? Проиллюстрируйте это понятие на примере канторова множества.
12. Объясните способ построения модифицированного канторова множества и определите его размерность.
13. Постройте самоподобные отрезки с помощью теоремы Леви. Какое множество называется множеством Леви? (на самостоятельное изучение).
14. Информационные характеристики фракталов. Объясните понятие информационной энтропии.
15. Сформулируйте принцип максимума энтропии. Каков характер зависимости количество комбинаций кодов для N-разрядного двоичного числа в зависимости от количества единиц в нем.
16. Числа заполнения. Определение информации о распределении элементов объекта посредством чисел заполнения. Среднее количество информации, необходимой для построения последовательности предфрактала данного поколения.

17. Условия максимума энтропии при ограничении постоянства информации. Объясните смысл множителя Лагранжа.
18. Понятие статистического ансамбля в статистической механике. Что такое статистическая сумма? В чем состоит аналогия итерационного процесса построения самоподобного фрактала и канонического ансамбля в статистической механике?
19. Запишите статистическую сумму ансамбля, соответствующего самоподобному фракталу. Какая величина соответствует температуре? Как связана фрактальная размерность самоподобного фрактала с информационными характеристиками итерационного процесса построения фрактала?

Перечень вопросов по темам 5-6.

1. Какие объекты называют мультифракталами? Чем они отличаются от фракталов? Какую роль в определении мультифрактала играет распределение меры? Всякое ли распределение меры задает мультифрактал?
2. Объясните понятие меры, заданной распределением вероятности на множестве. Что называют носителем меры? Опишите фрактальные свойства носителя меры (на самостоятельное изучение).
3. Объясните понятие меры $M_d(q, l)$, можно ли вычислить значение этой величины для обычного множества? Как она зависит от параметров? Как эта величина связана с количественными характеристиками мультифракталов?
4. Какое значение параметра d меры Хаусдорфа M_d называют критическим? В чем отличие d -меры Хаусдорфа $M_d(q, l)$ и функции разбиения?
5. Запишите выражение для функции обобщенных моментов. Каким свойством обладает эта функция для мультифракталов?
6. Определите показатель массы. Найдите связь между мультифрактальным спектром и показателем массы мультифрактала.
7. Объясните понятие спектра фрактальных размерностей $f(\alpha)$. Какими общими свойствами обладает спектр фрактальных размерностей $f(\alpha)$? Укажите характерные точки функции $f(\alpha)$.
8. Найдите значения $\alpha(q)$ при $q \rightarrow \infty$, $\alpha(q)$, $q = 1$. Объясните понятие информационной энтропии разбиения меры.
9. Что такое спектр размерностей Реньи? Вычислите значение размерности Реньи D_q при $q = 1$.
10. Какую величину называют массовым моментом? Укажите формальную связь массовых моментов со статистической суммой равновесного распределения в статистической механике (на самостоятельное изучение).
11. Опишите алгоритм биномиального мультипликативного процесса построения мультифрактала. Постройте распределение меры, порождаемое биномиальным мультипликативным процессом на множестве $J = [0, 1] \subset R^1$.
12. Какие величины называются скейлинговыми факторами, или коэффициентами сжатия биномиального мультипликативного процесса? Постройте явный вид распределения меры по ячейкам на втором этапе биномиального мультипликативного процесса.
13. Запишите выражение для меры μ_i i -ой ячейки в n -поколении биномиального мультипликативного процесса (на самостоятельное изучение).
14. Объясните понятие «чертовой лестницы» биномиального мультипликативного процесса Безиковича, Каков характер этой зависимости? Подсчитайте число ячеек с одинаковой мерой μ . Найдите выражение для этой меры. Покажите, что число ячеек с одинаковой мерой равно биномиальному коэффициенту C_n^k (на самостоятельное изучение).

15. Найдите параметрическое выражение для спектра мультифрактальных размерностей биномиального мультипликативного процесса.
16. Найдите значение информационной размерности для биномиального мультипликативного процесса.
17. Покажите, что почти вся мера Хаусдорфа для мультифрактала, получаемого в результате биномиального мультипликативного процесса, сосредоточена на множестве $J(\alpha_1)$, где $\alpha_1 = f(\alpha_1)$ — информационная энтропия.
18. Покажите, что спектр Реньи обобщенных размерностей фрактальных объектов для канторова множества с равномерно распределенной на нем мерой постоянен при изменении q .
19. Полностью ли определяются геометрическая структура самоподобного объекта его фрактальной размерностью? Дайте определение понятия параметра разветвления. Какие объекты называются однородными и квазиоднородными?
20. Объясните понятие связности объекта. В чем заключается смысл понятия лакунарности фрактального объекта? Как определяется параметр лакунарности и высшие лакунарности?
21. Для чего используется метод «скользящей» ячейки? Опишите этот метод. Найдите выражение, связывающее параметр лакунарности с первыми обобщенными моментами распределения мультифрактальной меры (на самостоятельное изучение).
22. Какова зависимость параметра лакунарности от размера ячейки в двойном логарифмическом масштабе для мультифрактальных объектов?
23. L-системы (на самостоятельное изучение).

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

1. Построение регулярных фракталов. Геометрические свойства регулярных фракталов.
 2. L-системы. Построение фракталов с помощью L-систем.
 3. Мера и размерность Хаусдорфа. Свойства меры и размерности.
 4. Самоподобие и фракталы. Сжимающие отображения и фракталы. Размерность подобия.
 5. Информационные свойства фракталов.
 6. Мультифракталы. Мультифрактальный спектр.
 7. Биномиальный мультипликативный процесс.
 8. Применение мультифрактального анализа. Фрактальные свойства оптических спектров.
- г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студента включает:

- углубленное теоретическое изучение разделов курса при подготовке к лекционным и практическим занятиям;
- подготовку к обсуждению материала, в том числе самостоятельный поиск необходимых источников информации, включая научно-образовательные ресурсы сети Интернет;
- подготовку к зачету.

Вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение.

1. Обобщенное канторово множество. Множество Жулия.
2. Множество Мандельброта.
3. Фрактальные свойства перколяционных кластеров.
4. Вычисление упаковочной размерности и корреляционной размерности.
5. Биномиальный и полиномиальный мультипликативные процессы.
6. Анализ фрактальных свойств оптических спектров.
7. Фрактальные свойства временных рядов.
8. L-системы.

Дополнительные вопросы для самостоятельной работы

1. Построение регулярных фракталов определение их фрактальных размерностей: размерности Хаусдорфа-Безиковича, клеточной размерности.
2. Вычисление кластерной размерности.
3. Самоподобие и размерность подобия. Информационная энтропия.

4. Прямое вычисление характеристик биномиального мультипликативного процесса.
5. Компьютерная реализация алгоритмов построения регулярных фракталов.
6. Вычисление дополнительных характеристик фрактальных объектов.

Темы для рефератов и учебно-методическая литература для самостоятельной работы по разделам дисциплины «Фрактальные структуры»:

Тема 1. Фрактальные кластеры.

Литература:

1. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ. 2 изд. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с.
2. Мандельброт Б.Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. – М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. – 392 с.
3. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1994. – 254 с.
4. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991. – 260 с.
5. Peiten H.-O. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science/ H.-O. Peiten, H. Jurgens, D. Saupé . – Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris: Springer-Verlag, 1992. – 984 p.
6. Fractals in Science / Ed. Bunde A. and Havlin S./ Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris: Springer-Verlag, 1995. – 258 p.
7. Фракталы в физике / Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. (Триест, Италия, 9-12 июля, 1985)/ Под ред. Л. Пьетронеро и Э Тозатти. Пер. с англ. М: Мир, 1988. 670 с.
8. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. – New York: W.H. Freeman and Co, 1982.

Тема 2. Фракталы в динамических системах.

Литература:

- 1 Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ. 2 изд. – М.: Техносфера. 2006. – 488 с.
2. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем/ Х.-О Пайтген, П.Х. Рихтер. – М: Мир, 1993. – 176 с.
3. Peiten H.-O. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science/ H.-O. Peiten, H. Jurgens, D. Saupé . – Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris: Springer-Verlag, 1992. – 984 p.
4. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. – Chichester, New York, Bristole, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons, 1990. – 288 p.

Тема 3. Мера Хаусдорфа и размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Литература:

1. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1994. – 254 с.
2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. – Chichester, New York, Bristole, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons, 1990. – 288 p.
3. Fractals in Science / Ed. Bunde A. and Havlin S./ Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris: Springer-Verlag, 1995. – 258 p.
4. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
5. Мандельброт Б.Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. – М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. – 392 с.
6. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. – New York: W.H. Freeman and Co, 1982.
7. Hutchinson J.E. Fractals and selfsimilarity//Indiana Univ. Math. Journ. 1981. V.30, No.5. P.713–747.

Тема 4. Мультифракталы.

Литература: 1. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1994. – 254 с.

2. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. – Chichester, New York, Bristole, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons, 1990. – 288 p.
3. Fractals in Science / Ed. Bunde A. and Havlin S./ Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris: Springer-Verlag, 1995. – 258 p.

4. Hutchinson J.E. Fractals and selfsimilarity//Indiana Univ. Math. Journ. 1981. V.30, No.5. P.713–747.
5. van Opheusden J.H.J. The origin of an increasing and decreasing multifractal spectrum//Physica A. 1998. 252. P.10–22.
6. Chhabra A., Jensen R.V. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum//Phys. Rev. Letters. 1989. 62. P.1327–1330.
7. Carbone V., Cipparrone G., Versace C., Umeton C., and Bartolino R. Multifractal structure and intermittency of laser-generated turbulence in nematic liquid crystals//Phys. Rev. E .1996. V.54. P. 6948–6951.
8. Фракталы в физике / Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. (Триест, Италия, 9-12 июля, 1985)/ Под ред. Л. Пьетронеро и Э Тозатти. Пер. с англ. – М: Мир, 1988. – 670 с.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Pietronero L., Tosatti E. (ed.). Fractals in physics. – Elsevier, 2012.
2. Мандельброт Б.Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. – М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. 392 с.
3. Кистенев Ю.В. Введение в теорию фракталов (учебное пособие) /Ю.В. Кистенев, А.В. Шаповалов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – 161 с.
4. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1994. –254 с.
5. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991. – 260 с.

б) дополнительная литература:

1. Пайтген Х.-О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем/ Х.-О Пайтген, П.Х. Рихтер. – М: Мир, 1993. – 176 с.
2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
- 3.Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988.
- 3.Батунин А.В. Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике адронов// УФН 1995. Т.165, No.6. С.645– 660.
4. Fractals in Science / Ed. Bunde A. and Havlin S./ Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris: Springer-Verlag, 1995. – 258 p.
5. Fisher Y. Fractal image compression:theory and application. – New York.: Springer-Verlag. 1995. – 341p.
6. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. –New York: W.H. Freeman and Co, 1982.
7. Фракталы в физике / Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. (Триест, Италия, 9-12 июля, 1985)/ Под ред. Л. Пьетронеро и Э Тозатти. Пер. с англ. – М: Мир, 1988. – 670 с.

в) ресурсы сети Интернет:

Математический архив. Фракталы. <http://archives.math.utk.edu/topics/fractals.html/>
 Physics Word поисковая система: <http://physicsweb.org/article/world/11/9/3/1/>
<https://physicsworld.com/a/fractal-patterns-spotted-in-the-quantum-realm/#:~:text=A%20fractal%20is%20a%20geometric,version%20of%20the%20previous%20branching.>
<https://www.youtube.com/watch?v=C5Jkgvw-Z6E>
<https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>
 Фрактальная космология:
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%BC%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F
<http://www.codenet.ru/progr/fract/intro.php>
http://www.povray.org/resources/links/3D_Resources/Fractals/

<http://314159.ru/zeleny/zeleny1.pdf>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:
– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTeX; системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, Waterloo Maple;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –
<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

– ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

– ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате, оснащенные системой («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Шаповалов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, заведующий кафедрой.