Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета
________________ С.Н. Филимонов

«15» апреля 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Группы и алгебры Ли

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2021

Код дисциплины в учебном плане: **Б1.В.ДВ.01.01.09**

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
________________ О.Н. Чайковская

Председатель УМК
________________ О.М. Сюсина

Томск – 2021

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-2 – Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;

– ПК-1 – Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 2.2 – Анализирует и интерпретирует экспериментальные и теоретические данные, полученные в ходе научного исследования, обобщает полученные результаты, формулирует научно обоснованные;

ИПК 1.1 – Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования.

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить основные понятия теории групп и алгебр Ли.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы теории групп для решения практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, входит в модуль по выбору «Теоретическая и математическая физика».

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 7, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Дифференциальная геометрия, Теория функций комплексного переменного, Методы математической физики, Теория групп.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 часов, из которых:

– лекции: 32 ч.;

–практические занятия: 16 ч.;

– в том числе практическая подготовка: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Определение и примеры алгебр Ли.

Тема 2. Связь между группами и алгебрами Ли.

Тема 3. Экспоненциальное отображение.
Тема 4. Ряд Кэмбэлла-Хаусдорфа-Дынкина.
Тема 5. Классические алгебры Ли.
Тема 6. Радикал алгебры Ли. Структура алгебр Ли.
Тема 7. Представление алгебр Ли.
Тема 8. Структура представлений разрешимых алгебр Ли.
Тема 9. Полная приводимость конечномерных представлений простых алгебр Ли.
Тема 10. Форма Киллинга.
Тема 11. Критерии Картана полупростоты и разрешимости.
Тема 12. Операторы Казимира. Теорема Вейля.
Тема 13. Компактные алгебры Ли.
Тема 14. Комплексификация и вещественные формы алгебры Ли.
Тема 15. Корневая система полупростой компактной алгебры Ли. Базис Картана-Вейля.
Тема 16. Системы Корней.
Тема 17. Восстановление алгебры Ли по ее корневой системе. Системы корней ранга два.
Тема 18. Классификация систем простых корней.
Тема 19. Классификация систем простых корней. Схемы Дынкина.
Тема 20. Представления старшего веса. Представление алгебры sl(2).

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится с применением балльно-рейтинговой системы, включающей контроль посещаемости, результаты выполнения контрольных работ, заданий и тестов по материалам курса, и фиксируется в форме баллов (нарастающим итогом): посещаемость – максимальный балл 10, выполнение контрольных заданий – 30, тестов – 10. Контрольная точка проводится не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в шестом семестре проводится в письменной форме по билетам. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

На промежуточную аттестацию планируется не более 40% рейтинга.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Экзаменационная оценка определяется исходя из результатов экзамена и текущей аттестации в течение семестра и согласуется с принятым соответствием с 5-ти балльной шкалой оценивания: 99-86 — «отлично»; 85-66 — «хорошо»; 65-45 — «удовлетворительно», менее 45— «неудовлетворительно».

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов.

Первый вопрос проверяет сформированность компетенции ПК-1 в соответствии с индикатором достижения ИПК-1.1. Ответ дается в развернутой форме, включая вычисления.

Второй вопрос из списка контрольных вопросов по курсу (приведен в разделе 11), проверяет сформированность компетенции ОПК-2 в соответствии с индикатором достижения компетенции ИОПК-2.2. Ответ на вопрос второй части дается в краткой форме, включающей краткую интерпретацию полученных результатов.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=21853 б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти генераторы вращений $(SO(3,R),R^3)$ в трехмерном евклидовом пространстве. Найти генераторы действия $(SO(3,R),S^2)$ группы вращений на сфере.

2. Пусть $\{\tilde{A}_{\vec{k}};\vec{k}\in R^3\}$ — генераторы конечномерного линейного представления $(T,SO(3,R),V)$ группы вращений. Докажите, что для любого $g_0\in SO(3,R)$ справедлива формула $T(g_0)\tilde{A}_{\vec{k}}T(g_0^{-1})=\tilde{A}_{\vec{k}'}$, где $\vec{k}'=g_0\vec{k}$.

3. Пусть $\{\tilde{A}_{\vec{k}};\vec{k}\in R^3\}$ — генераторы конечномерного линейного представления $(T,SO(3,R),V)$ группы вращений. Докажите, что подпространство $M\subset V$ тогда и только тогда является инвариантным подпространством представления T, когда оно инвариантно относительно каждого из базисных генераторов $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ и $\tilde{A}_3$.

4. Пусть $(T,SO(3,R),V)$ —конечномерное комплексное, вообще говоря, приводимое представление группы вращений. Докажите, что при его разложении на неприводимые встретятся представления только с теми спинами s, для которых существует совместное решение уравнений $H_+\vec{f}=0$, $H_3\vec{f}=s\vec{f}$, причем кратность представления спина s равна числу линейно независимых решений этих уравнений.

5. Докажите корректность определения и положительную определенность эрмитовой формы, определенной в тензорном произведении $V=V_1\bigotimes V_2$ унитарных пространств $(V_1,\langle\ ,\ \rangle_1)$ и $(V_2,\langle\ ,\ \rangle_2)$ формулой $\langle\ \vec{x}_1\bigotimes\vec{y}_1,\vec{x}_2\bigotimes\vec{y}_2\ \rangle_V=\langle\ \vec{x}_1,\vec{y}_1\ \rangle_1\cdot\langle\ \vec{y}_1,\vec{y}_2\ \rangle_2$ для любых $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in V_1$ и $\vec{y}_1,\vec{y}_2\in V_2$. -3.5mm

6. Вычислить все коэффициенты Клебша-Гордана группы вращений в случае, когда одно из неприводимых представлений имеет спин $1/2$, т.е. для представления $T=T^{1/2}\bigotimes T^s$, $s=0,1/2,1,\ldots$

7. Электрон находится в состоянии со спиновой поляризацией $\begin{pmatrix} i\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ и орбитальным моментом импульса l с круговой поляризацией. Определить вероятности всевозможных значений полного момента импульса и проекции полного момента импульса на определенное направление.

8. Проверить, что оператор Рунге-Ленца коммутирует с гамильтонианом кулоновой задачи.

9. Вычислить оператор Казимира правого регулярного представления группы вращений в параметризации Эйлера.

10. Докажите, что все гладкие линейно независимые решения дифференциального

уравнения второго порядка, которому удовлетворяют обобщенные сферические функции, этими функциями исчерпываются.

11. Докажите, что левоинвариантная дифференциальная форма $\omega \in \Omega_{linv} G$ на группе Ли полностью определяется своим значением $\omega_e \in \Lambda T_e G$ в единице группы и возникающее отображение $\Omega_{linv} G \to \Lambda T_e G$ является изоморфизмом алгебр.

12. Вывести структурные уравнения Маурера-Картана на группе Ли явно в локальных координатах, отправляясь от структурных уравнений алгебры Ли левоинвариантных векторных полей.

13. Докажите, что тождество Якоби для структурных констант алгебры Ли является необходимым условием интегрируемости уравнений Маурера-Картана.

14. В параметризации Эйлера вычислить все левоинвариантные один-формы на группе вращений $SO(3,R)$.

15. Пусть $\beta_X \in g$ — однопараметрическая подгруппа в группе Ли g, для которой вектор $X \in g$ является касательным при $t = 0$. Докажите, что $\beta_{kX}(t) = \beta_X(kt)$ при любых $k, t \in R$.

16. Пусть g и h — алгебры Ли групп Ли G и H соответственно. Приведите пример, в котором гомоморфизм $\psi : g \to h$ не индуцирован никаким гомоморфизмом групп $\varphi : G \to H$.

17. Подстановкой матричных рядов докажите, что для любой матрицы $A \in Mat(n, K)$, удовлетворяющей условию $\| A \| < \ln 2$ справедливо тождество $\ln e^A = A$.

18. Покажите, что для матрицы $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ матрица $\ln e^{\Sigma}$ определена, но $\ln e^{\Sigma} \neq \Sigma$. Объясните результат.

19. а) Докажите, что если $f : U \to V$ — «локальный изоморфизм» окрестностей единиц U и V некоторых групп Ли, то $f(e) = e$.

б) Докажите, что алгебры Ли локально изоморфных групп Ли изоморфны.

20. Из формулы Кемпбелла – Хаусдорфа (без использования теоремы Дынкина) получить третий многочлен Дынкина $Z_3(X, Y)$.

21. Докажите, что две произвольные нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны.

22. Докажите, что в конечномерном линейном пространстве сильная сходимость эквивалентна покоординатной.

23. Докажите, что в линейном нормированном пространстве каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

24. Докажите, что в конечномерном линейном нормированном пространстве каждая фундаментальная последовательность сходится.

25. Докажите, что в полном линейном нормированном пространстве любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

26. Доказать, что формула $\| A \| = n \max_{1 \le i, j \le n} | a_{ij} |$, $A = \| a_{ij} \| \in Mat(n, K)$ определяет мультипликативную норму в полной матричной алгебре n-го порядка.

27. Докажите сходимость экспоненциального и логарифмического матричных рядов.

28. Докажите, что для любых $X, Y \in g$ из алгебры Ли группы Ли G справедлива формула: $\exp tX \exp tY (\exp tX)^{-1} = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$.

29. Докажите, что множество правоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует алгебру Ли относительно коммутатора, как линейное пространство естественно изоморфное $T_e G$. Докажите изоморфизм алгебр Ли правоинвариантных и левоинвариантных векторных полей на группе Ли.

30. Докажите, что на группе Ли каждое правоинвариантное векторное поле коммутирует с каждым левоинвариантным.

31. В параметризации Эйлера на группе вращений вычислить все правоинвариантные векторные поля. Найти их алгебру Ли и коммутаторы с левоинвариантными векторными полями прямым вычислением.

32. Определить генераторы левого гладкого действия группы Ли G на многообразии и доказать, что алгебра Ли этих генераторов гомоморфна алгебре Ли группы G.

33. Докажите, что матричные генераторы конечномерного линейного представления группы Ли G образуют алгебру Ли, гомоморфную алгебре Ли группы G.

34. Докажите, что действие связной группы Ли на произвольном многообразии однозначно восстанавливается по генераторам действия.

35. Докажите, что если $\{\tilde{A}_X, X \in g\}$ — матричные генераторы конечномерного линейного представления (T, G, V) группы Ли и $a = \beta_X(1) \equiv \exp X \in G$, то $T(a) = \exp \tilde{A}_X$.

36. Докажите, что дифференцируемое конечномерное линейное представление группы Ли тогда и только тогда унитарно, когда его матричные генераторы косоэрмитовы.

37. Пусть компактная группа Ли G гладко действует на хаусдорфовом многообразии M со второй аксиомой счетности. Докажите, что на M существует G-инвариантная метрика.

38. Докажите, что присоединенное представление группы $SO(3, R)$ эквивалентно фундаментальному.

39. Докажите, что в алгебре Ли компактной группы Ли существует базис, в котором структурные константы абсолютно кососимметричны.

40. Пусть $\Psi: G_1 \to G_2$ — гладкий сюръективный гомоморфизм групп Ли, $H = \mathrm{Ker}\,\Psi$ — его ядро и g_1, g_2, h — алгебры Ли групп G_1, G_2 и H — соответственно. Докажите, что алгебра Ли g_2 изоморфна фактор-алгебре g_1/h.

41. Докажите, что ядро $\mathrm{Ker}\,\psi$ любого гомоморфизма $\psi: g_1 \to g_2$ является идеалом в g_1, а образ $\mathrm{Im}\,\psi$ — подалгеброй в g_2. Докажите, что существует изоморфизм алгебр Ли $g_1/\mathrm{Ker}\,\psi \to \mathrm{Im}\,\psi$.

42. Пусть (g, φ, V_1) и (g, ψ, V_2) — два конечномерных линейных представления алгебры Ли g. Докажите, что формула $\pi(X)(\vec{x} \otimes \vec{y}) = \varphi(X)\vec{x} \otimes \vec{y} + \vec{x} \otimes \psi(X)\vec{y}$, $\forall X \in g, \vec{x} \in V_1, \vec{y} \in V_2$ корректно определяет некоторое представление $(g, \varphi \otimes \psi, V_1 \otimes V_2)$ алгебры g.

43. Пусть (g, φ, V) — линейное представление алгебры Ли g. Докажите, что формула $\varphi^*(X): \alpha \to \varphi^*(X)\alpha$, $\forall X \in g, \alpha \in V^*$, где $\varphi^*(X)\alpha(\vec{x}) = -\alpha(\varphi(X)\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$, корректно определяет представление (g, φ^*, V^*) алгебры g.

44. Пусть (g, φ, V) — конечномерное линейное представление алгебры Ли g. Как связаны матрицы представлений φ и φ^* в дуальных базисах?

45. Вычислите формы Киллинга алгебр Ли $u(p,q)$ и $su(p,q)$. Докажите, что алгебры Ли $su(p,q)$ полупростые, а алгебры Ли $u(p,q)$ не полупростые.

46. Докажите, что для любого дифференцирования D алгебры Ли g и любого натурального k справедливо тождество $D^k[X,Y] = \sum_{m=0}^{k} C_k^m [D^m X, D^{k-m} Y]$ для любых $X, Y \in g$.

47. а) Докажите, что для полупростой алгебры Ли $[g,g] = g$. б) Докажите, что $[g,g] = g$ для (не полупростой!) алгебры Пуанкаре. в) Вычислите коммутаторную алгебру Ли алгебры Галилея.

48. а) Докажите, что всякая подгруппа разрешимой группы разрешима. б) Докажите, что фактор-группа любой разрешимой группы по разрешимому нормальному делителю разрешима. в) Докажите, что если H — замкнутый разрешимый нормальный делитель топологической группы G и факторгруппа G/H разрешима, то и группа G разрешима.

49. Докажите, что подгруппа группы $GL(n, K)$, состоящая из всех матриц с нулями ниже главной диагонали, разрешима.

г) Примерные вопросы к коллоквиуму

Билет № 1

1. Левоинвариантные векторные поля на группе вращений: геометрическое происхождение

и свойства. Вычисление коммутатора левоинвариантных векторных полей на группе вращений. Выражение левоинвариантных векторных полей на группе вращений через углы Эйлера.
2. Полупростые алгебры Ли. Свойства идеалов полупростых алгебр Ли. Критерий Картана полупростоты алгебры Ли (доказательство необходимости). Тривиальность центра полупростой алгебры Ли. Простые группы и алгебры Ли. Критерий простой группы Ли. Разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых идеалов.

Билет № 2

1. Определение и основные примеры групп Ли. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей. Структурные константы алгебры Ли, уравнения для структурных констант.
2. Дифференцирования алгебры Ли. Алгебра Ли дифференцирований. Взаимосвязь между дифференцированиями и автоморфизмами алгебр Ли. Внутренние и внешние дифференцирования. Идеал внутренних дифференцирований. Отсутствие внешних дифференцирований полупростой алгебры Ли.

Билет № 3

1. Левоинвариантные дифференциальные формы на группе Ли. Формы Маурера-Картана. Критерий левоинвариантности один-форм на группе Ли. Структурные уравнения Маурера-Картана.
2. Компактная алгебра Ли. Структура компактной алгебры Ли. Критерий компактности полупростой алгебры Ли. Взаимосвязь компактных алгебр и групп Ли.

Билет № 4

1. Однопараметрические подгруппы группы Ли. Связь однопараметрических подгрупп с левоинвариантными векторными полями на группе Ли. Ослабление требования гладкости для однопараметрических подгрупп.
2. Производный ряд алгебры Ли. Разрешимые алгебры Ли. Подалгебры, гомоморфизмы и фактор-алгебры разрешимых алгебр Ли. Флаг алгебр Ли. Критерий разрешимости алгебры Ли на языке флага подалгебр. Теорема Ли. Приведение матриц операторов представления разрешимой алгебры Ли к верхнетреугольному виду. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли (доказательство необходимости). Радикал алгебры Ли. Теорема Картана – Леви – Мальцева (без доказательства).

Билет № 5

1. Три реализации алгебры Ли группы Ли. Взаимосвязь различных реализаций. Интерпретация операций в алгебре Ли группы Ли на языке каждой из известных реализаций.
2. Определение и примеры алгебр Ли. Линейное представление алгебры Ли. Конечномерные и бесконечномерные линейные представления. Размерность линейного представления. Неприводимые, приводимые и вполне приводимые представления. Контрагредиентное и сопряженное представление алгебры Ли. Тензорное произведение линейных представлений алгебры Ли. Точное представление. Теорема Адо (доказательство для алгебр Ли с нулевым центром).

Билет № 6

1. Экспоненциальное отображение алгебры Ли в группу Ли. Свойства экспоненциального отображения. Канонические карты и канонические координаты первого рода.
2. Форма Киллинга алгебры Ли. Свойства формы Киллинга (симметричность, инвариантность, инвариантность относительно автоморфизмов алгебры). Матрица формы

Киллинга. Форма Киллинга идеала алгебры Ли.

Билет № 7

1. Гомоморфизм алгебр Ли, индуцированный гомоморфизмом групп Ли. Свойства отображений однопараметрических подгрупп при гомоморфизмах.

2. Вычисление формы Киллинга алгебр Ли gl(n,K), sl(n,K), so(n,C) ,so(p,q). Вырожденность формы Киллинга алгебры Ли gl(n,K). Полупростота алгебр Ли sl(n, K), so(n,C), so(p,q), su(p,q).

Билет № 8

1. Матричные группы Ли. Левоинвариантные векторные поля и однопараметрические подгруппы матричной группы Ли.

2. Полупростые алгебры Ли. Свойства идеалов полупростых алгебр Ли. Критерий Картана полупростоты алгебры Ли (доказательство необходимости). Тривиальность центра полупростой алгебры Ли. Простые группы и алгебры Ли. Критерий простой группы Ли. Разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых идеалов.

Билет № 9

1. Основные задачи теории групп Ли. Локально изоморфные группы Ли. Критерий локального изоморфизма групп Ли (доказательство необходимости).

2. Дифференцирования алгебры Ли. Алгебра Ли дифференцирований. Взаимосвязь между дифференцированиями и автоморфизмами алгебр Ли. Внутренние и внешние дифференцирования. Идеал внутренних дифференцирований. Отсутствие внешних дифференцирований полупростой алгебры Ли

Билет № 10

1. Экспонента линейного дифференциального оператора на вещественно-аналитическом многообразии. Вычисление экспоненты.

2. Компактная алгебра Ли. Структура компактной алгебры Ли. Критерий компактности полупростой алгебры Ли. Взаимосвязь компактных алгебр и групп Ли.

Билет № 11

1. Получение формального ряда Кемпбелла-Хаусдорфа на группе Ли. Получение первых нескольких членов ряда. Теорема Дынкина (без доказательства). Теоретическое значение рядя Кемпбелла-Хаусдорфа. Критерий локального изоморфизма групп Ли (доказательство достаточности).

2. Производный ряд алгебры Ли. Разрешимые алгебры Ли. Подалгебры, гомоморфизмы и фактор-алгебры разрешимых алгебр Ли. Флаг алгебр Ли. Критерий разрешимости алгебры Ли на языке флага подалгебр. Теорема Ли. Приведение матриц операторов представления разрешимой алгебры Ли к верхнетреугольному виду. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли (доказательство необходимости). Радикал алгебры Ли. Теорема Картана – Леви – Мальцева (без доказательства).

Билет № 12

1. Подгруппы Ли. Биективное соответствие между подгруппами и подалгебрами Ли. Теорема Картана о замкнутых подгруппах (без доказательства).

2. Определение и примеры алгебр Ли. Линейное представление алгебры Ли. Конечномерные и бесконечномерные линейные представления. Размерность линейного представления. Неприводимые, приводимые и вполне приводимые представления. Контрагредиентное и сопряженное представление алгебры Ли. Тензорное произведение линейных представлений алгебры Ли. Точное представление. Теорема Адо (доказательство для алгебр Ли с нулевым центром).

Билет № 13

1. Сходимость ряда Кемпбелла – Хаусдорфа.
2. Форма Киллинга алгебры Ли. Свойства формы Киллинга (симметричность, инвариантность, инвариантность относительно автоморфизмов алгебры). Матрица формы Киллинга. Форма Киллинга идеала алгебры Ли.

Билет № 14

1. Подгруппы Ли. Биективное соответствие между подгруппами и подалгебрами Ли. Теорема Картана о замкнутых подгруппах (без доказательства).
2. Вычисление формы Киллинга алгебр Ли gl(n,K), sl(n,K), so(n,C), so(p,q). Вырожденность формы Киллинга алгебры Ли gl(n,K). Полупростота алгебр Ли sl(n,K), so(n,C), so(p,q), su(p,q).

Билет № 15

1. Структура многообразия на факторпространстве группы Ли по замкнутой подгруппе. Однородные многообразия. Каноническая реализация однородного многообразия. Факторгруппы Ли.
2. Полупростые алгебры Ли. Свойства идеалов полупростых алгебр Ли. Критерий Картана полупростоты алгебры Ли (доказательство необходимости). Тривиальность центра полупростой алгебры Ли. Простые группы и алгебры Ли. Критерий простой группы Ли. Разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых идеалов.

Билет № 16

1. Генераторы действия группы на многообразии. Гомоморфизм алгебры Ли группы Ли в алгебру генераторов. Генераторы эффективных и свободных действий. Генераторы линейного представления.
2. Дифференцирования алгебры Ли. Алгебра Ли дифференцирований. Взаимосвязь между дифференцированиями и автоморфизмами алгебр Ли. Внутренние и внешние дифференцирования. Идеал внутренних дифференцирований. Отсутствие внешних дифференцирований полупростой алгебры Ли.

Билет № 17

1. Присоединенное представление группы Ли. Присоединенное представление алгебры Ли. Явный вид присоединенного оператора в алгебре Ли. Гомоморфизм алгебры Ли в алгебру присоединенных операторов. Ядро этого гомоморфизма. Матрица присоединенного оператора.
2. Компактная алгебра Ли. Структура компактной алгебры Ли. Критерий компактности полупростой алгебры Ли. Взаимосвязь компактных алгебр и групп Ли.

Билет № 18

1. Ядро присоединенного представления группы Ли. Алгебра Ли ядра гладкого гомоморфизма групп Ли. Алгебра Ли центра связной группы Ли. Критерий коммутативности связной группы Ли.
2. Производный ряд алгебры Ли. Разрешимые алгебры Ли. Подалгебры, гомоморфизмы и фактор-алгебры разрешимых алгебр Ли. Флаг алгебр Ли. Критерий разрешимости алгебры Ли на языке флага подалгебр. Теорема Ли. Приведение матриц операторов представления разрешимой алгебры Ли к верхнетреугольному виду. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли (доказательство необходимости). Радикал алгебры Ли. Теорема Картана – Леви – Мальцева (без доказательства).

е) Для эффективного освоения дисциплины студентам рекомендуется:

- после лекции просмотреть и обдумать текст конспекта (15 минут);
- накануне следующей лекции вспомнить материал предыдущей (15 минут);
- изучение теоретического материала по пособию лектора, учебникам и конспекту (1 час в неделю);
- подготовка к практическому занятию (2 часа в неделю);
- работа с литературой в библиотеке (1 час в неделю).
- систематически решать предлагаемые лектором задачи.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Наймарк М.А. Теория представлений групп. Наука. 1976.
2. Барут А., Рончка Р, Теория представлений групп и ее приложения, в 2-ух тт.. Мир. 1980.
3. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Наука. 1984.
4. Эллиот Дж., Доббер П. Симметрия в физике, в 2-ух тт. Мир 1983.
5. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. Наука. 1970.

б) дополнительная литература:

1. Постников М.М. Лекции по геометрии. СеместрV. Группы и алгебры Ли. Наука. 1982.
2. Зуланке Р., Винтер П. Дифференциальная геометрия и расслоения. Мир. 1975.
3. Шаповалов А.А., Конусов В.Ф., Вааль А.А. Теория конечных групп. ТГУ. 1978.
4. Горбунов И.В. Лекции по теории групп. Представления компактных групп. Представления группы вращений. Томск. НТЛ. 2007.
5. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. Мир. 1969.
6. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. Наука. 1978.
7. Адамс Дж. Лекции по группам Ли. Наука. 1979.
8. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. Мир. 1970.
9. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. Мир. 1981.
10. Ляховский В.Д., Болохов А.А. Группы симметрии и элементарные частицы. ЛГУ. 1983.
11. Хамармеш М. Теория групп и ее физические приложения. УРСС. 2002.
12. М. Гото, Ф.Гроссханс. Полупростые алгебры Ли. Мир. 1981.
13. Г.Вейль Теория групп и квантовая механика. Наука. 1986.
14. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физ.-мат.лит. 1958.
15. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. Физ.мат.лит. 1958.
16. Виленкин И.Я. Специальные функции и теория представлений групп. Наука. 1965.

в) ресурсы сети Интернет:

1. https://scholar.google.ru/
2. https://www.scopus.com/
3. http://www.mathnet.ru/

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office

Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTex;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

– ЭБС Консультант студента – http://www.studentlibrary.ru/

– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/

– ЭБС ZNANIUM.com – https://znanium.com/

– ЭБС IPRbooks – http://www.iprbookshop.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате, оснащенные системой («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Шарапов Алексей Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры квантовой теории поля физического факультета ТГУ, заведующий лабораторией теоретической и математической физики.