МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Директор института прикладной математики и компьютерных наук
_____________ А.В. Замятин
«_11_» _ноября_ 2021 г.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

рабочая программа дисциплины

Закреплена за кафедрой	*системного анализа и математического моделирования*
Учебный план	*01.03.02 «Прикладная математика и информатика», профиль «Прикладная математика и информатика»*
Форма обучения	*очная*
Общая трудоёмкость	*5 з.е.*
Часов по учебному плану	*180*
в том числе:	
аудиторная контактная работа	*71,5*
самостоятельная работа	*76,8*
Вид(ы) контроля в семестрах	
Экзамен / зачет / зачет с оценкой	*Семестр 4 − экзамен*

Томск–2021

Программу составил:
д.ф-м.н., профессор,
профессор кафедры системного анализа и
математического моделирования В.А. Васильев

Рецензент:
д.ф-м.н., доцент,
профессор кафедры системного анализа и
математического моделирования С.Э. Воробейчиков

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» разработана в соответствии с самостоятельно устанавливаемым образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат – Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (Утвержден Ученым советом НИ ТГУ, протокол от 27.10.2021 г. № 08).

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры системного анализа и математического моделирования

Протокол от 03 июня 2021 г. № 26

Заведующий кафедрой системного анализа и математического моделирования,

д.ф-м.н., профессор Ю.Г. Дмитриев

Рабочая программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН)

Протокол от 17.06.2021 г. № 05

Председатель УМК ИПМКН,
д.т.н., профессор С.П. Сущенко

Цель освоения дисциплины/модуля

Цель – подготовить студентов к освоению основных фундаментальных курсов и выполонению курсовых и выпускных квалификационных работ.

1. Место дисциплины/модуля в структуре ООП/ОПОП

Дисциплина относится к дисциплинам по выбору студента вариативной части Общепрофессионального цикла Блока 1 «Дисциплины/модули»;

Пререквизиты дисциплины: математический анализ, линейная алгебра и аналитическая геометрия

Постреквизиты дисциплины/модуля: математическая статистика, уравнения математической физики, стохастические дифференциальные уравнения.

2. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины/модуля

Таблица 1.

Компетенция	Индикатор универсальной компетенции	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций)
ИОПК-1.1; ИОПК-1.2; ИОПК-1.3; ИОПК-3.1; ИОПК-3.2; ИОПК-3.3	ИОПК-1.1; Обучающийся сможет использовать литературу по дисциплине, отвечающую современным требованиям ИОПК-1.2; Обучающийся приобретет навыки решения типовых задач функционального анализа, позволяющих овладеть основными методами исследования моделей в прикладных задачах ИОПК-1.3; Обучающийся приобретет умение довести решение практических задач до работающих алгоритмов ИОПК-3.1; Обучающийся приобретет навыки разработки сложных математических моделей, адекватно описывающих реальные физические явления ИОПК-3.2; Обучающийся приобретет умения анализировать сложные математические модели и находить новые подходы для достижения поставленных целей ИОПК-3.3 Обучающийся приобретет навыки	

	разработки сложных математических моделей, адекватно описывающих реальные физические явления, и новых подходов к их анализу	

2. Структура и содержание дисциплины/модуля

2.1.Структура и трудоемкость видов учебной работы по дисциплине/модулю

Общая трудоемкость дисциплины/модуля составляет 4 зачетные единицы, 144 часа.

Таблица 2.

Вид учебной работы	Трудоемкость в академических часах	
Общая трудоемкость	4 семестр	всего
Контактная работа:	69,5	69,5
Лекции (Л):	32	32
Практики (ПЗ)	32	32
Лабораторные работы (ЛР)		
Семинары (СЗ)		
Групповые консультации	2	2
Индивидуальные консультации	3,2	3,2
Промежуточная аттестация	0,3	0,3
Самостоятельная работа обучающегося:	74,5	74,5
- написание реферата	7	7
- выполнение контрольной работы	7	7
- подготовка доклада, сообщения	7	7
- изучение учебного материала, публикаций	5,8	5,8
- подготовка к практическим занятиям/коллоквиумам	14	14
- подготовка к рубежному контролю по теме/разделу	33,7	33,7
Вид промежуточной аттестации (зачет, зачет с оценкой, экзамен)	**Экзамен**	

2.2. *Содержание и трудоемкость разделов дисциплины/модуля*

Таблица 3.

Код занятия	Наименование разделов и тем и их содержание /	Вид учебной работы, занятий, контроля	Семестр	Часы в электронной форме	Всего (час.)	Литература	Код (ы) результата(ов) обучения
	Раздел 1. Множества и метрические пространства						
1.1.	*Введение в основные задачи дисциплины, множества, операции над множествами. Классы множеств: алгебры, полуалгебры, полукольца, кольца. Построение оптимальной алгебры по конечной системе множеств. Метрические пространства. Примеры. Свойства непрерывных отображений. Борелевские измеримые функции.*	Лекции			12		ИОПК-1.1; ИОПК-1.2;
1.2.	*Множества, операции над множествами. Классы множеств: алгебры, полуалгебры, полукольца, кольца. Построение оптимальной алгебры по конечной системе множеств. Метрические пространства. Свойства непрерывных отображений. Борелевские измеримые функции.*	Практики			12		
1.3.	*Выполнение индивидуальных заданий по теме. Опрос по теме.*	СРС			15		
	Текущий контроль успеваемости	*Защита ИДЗ.*					
	Раздел 2. Принцип сжимающих отображений						
2.1.	*Принцип сжимающих отображений. Его применение к решению интегральных уравнений Фредгольма и систем линейных уравнений. Обобщенный принцип сжимающих отображений, его применение к решению уравнения Вольтера и к доказательству эргодической теоремы для*	Лекции			10		ИОПК-1.1; ИОПК-1.2; ИОПК-1.3; ИОПК-3.1;

	конечных марковских цепей.						
2.2.	*Решение интегральных уравнений Фредгольма и систем линейных уравнений с помощью принципа сжимающих отображений. Обобщенный принцип сжимающих отображений, его применение к решению уравнения Вольтера*	Практики			10		
2.3.	*Выполнение индивидуальных заданий по теме. Выполнение домашней контрольной работы.*	СРС			10		
	Текущий контроль успеваемости	*Защита ИДЗ.*					
	Раздел 3. Измеримые функции и интеграл Лебега						
3.1.	*Измеримые функции. Дескриптивное определение. Свойства. Конструктивные определения измеримых функций. Доказательство эквивалентности дескриптивного и конструктивного определений. Интеграл Лебега и его свойства. Теорема о замене переменной в интеграле Лебега. Теорема Радона-Никодима. Плотные множества в метрических пространствах. Полиномы Бернштейна.*	Лекции			10		ИОПК-1.1; ИОПК-1.2; ИОПК-1.3; ИОПК-3.1; ИОПК-3.2; ИОПК-3.3
3.2.	*Измеримые функции. Интеграл Лебега и его свойства. Теорема о замене переменной в интеграле Лебега. Теорема Радона-Никодима. Плотные множества в метрических пространствах. Полиномы Бернштейна.*	Практики			10		
3.3.	*Выполнение индивидуальных заданий по теме. Опрос по теме.*	СРС			15,8		
	Текущий контроль успеваемости						
	Подготовка к промежуточной аттестация	Экзамен			33,7		

3. Образовательные технологии, учебно-методическое и информационное обеспечение для освоения дисциплины/модуля

Обязательными при изучении дисциплины «Функциональный анализ 1» являются следующие виды самостоятельной работы:

— разбор теоретического материала по пособиям и конспектам лекций;
— самостоятельное изучение указанных теоретических вопросов;
— решение задач по темам практических занятий;
— подготовка и представление докладов на практических занятиях;
— подготовка к экзамену.

Для текущего контроля самостоятельной работы студентов предусмотрено проведение контрольных работ по основным разделам дисциплины.

Для закрепления теоретического материала предполагается самостоятельное выполнение заданий по каждой пройденной теме, что позволяет обратить внимание на наиболее сложные и ключевые аспекты изучаемой темы, помочь бакалаврам систематизировать и лучше усвоить пройденный материал. При выполнении заданий бакалавр должен не просто воспроизводить полученные знания по заданной теме, но и творчески переосмыслить существующие подходы к изучаемым проблемам.

3.1.Рекомендуемая литература и учебно-методическое обеспечение

№ п/п	Авторы / составители	Заглавие	Издательство	Год издания
1.	Коломогоров А.Н., Фомин С.В.	Элементы теории функций и функционального анализа.	М.:Наука	1989
2.	Шилов Г.Е.,	Математический анализ. Специальный курс	М.:ГИФМЛ	1965
3.	Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.,	Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учебн. Пособие.	М.: ФИЗМАТЛИТ	2002
4.	Соболев В.И.	Лекции по дополнительные главам математического анализа	М.: Наука	1968
5.	Дьедонне Ж.	Основы современного анализа.	М.: Мир	1964
6.	Рудин У.	Функциональный анализ	М.: Мир	1976
7.	Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.	Теоремы и задачи функционального анализа.	М.: Наука	1979
8.	Сибиряков Г.В., Мартынов Ю.А. ,	Метрические пространства	Изд-во Томского университета	2012
9.	Треногин В.А.	Функциональный анализ	М.: Наука	1980
10	Дороговцев А.Я.	Математический анализ: сборник задач	К.: Виша шк.	1989

3.2.Базы данных и информационно-справочные системы, в том числе зарубежные нет

3.3. Перечень лицензионного и программного обеспечения нет

3.4. Оборудование и технические средства обучения нет

4. Методические указания обучающимся по освоению дисциплины/модуля

При изучении каждой темы предполагается выполнение домашних заданий, проведение коллоквиумов и контрольных работ.

В процессе изучения дисциплины предусмотрены несколько форм контроля.

Входной контроль организуется и проводится до начала занятий в форме блиц-опросов с целью определения исходного уровня подготовки слушателей, ожиданий от курса и подготовки.

Текущий контроль приобретения компетенций осуществляется с помощью опросов, путем проверки уровня усвоения знаний, а также с помощью выполнения заданий для самостоятельно работы (индивидуальных и групповых) по основным разделам курса. Контроль активно осуществляется в ходе коллективного обсуждения решения задач, а также с помощью сообщений и докладов слушателями по темам, разделам курса. Результаты самостоятельных заданий представляются в письменном виде. Кроме того, в качестве заданий для текущего контроля, предлагается проведение самостоятельных работ, которые позволят оценить знания, полученные после изучения каждого раздела дисциплины.

Итоговой формой контроля является экзамен. Целью итогового контроля является проверка усвоения слушателями знаний по всем темам дисциплины «Функциональный анализ 1».

Для самостоятельной работы обучающихся используются ресурсы, указанные в списке литературы. Предполагается, что обучающийся самостоятельно находит в этих источниках соответствующую тему и выполняет задание. Список возможных заданий приведен ниже.

Тема 1. Теория множеств.

1. Проверить

а) $A\Delta B\subset(A\Delta C)\bigcup(B\Delta C)$,

б) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\bigcup(A_2\Delta B_2)$,

в) $(A_1\cap A_2)\Delta(B_1\cap B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\bigcap(A_2\Delta B_2)$,

г) $(A_1\setminus A_2)\setminus(B_1\setminus B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\setminus(A_2\Delta B_2)$.

2. Пусть множество Ω состоит из N элементов. Показать, что общее число $d(N)$ различных разбиений Ω определяется формулой

$$d(N)=e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}\quad (*).$$

Указание: доказать, что

$$d(N)=\sum_{k=0}^{N-1}C_{N-1}^{k}d(k),\quad d(0)=1,$$

и проверить, что ряды (*) удовлетворяют этим рекуррентным соотношениям.

3. Дать определения полукольца, кольца, полуалгебры, алгебры, σ-алгебры и топологии.

4. Доказать, что если C_1 и C_2 – полукольца, то $C_1\times C_2$ – полукольцо.

5. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\downarrow A_n=\bigcap\limits_{n\geq 1}A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\uparrow A_n=\bigcup\limits_{n\geq 1}A_n$.

6. Пусть $\{x_n\}$ – числовая последовательность и $A_n=(-\infty,x_n)$. Показать, что $x=\limsup x_n$ и $A=\limsup A_n$ связаны следующим образом: $(-\infty,x_n)\subseteq A\subseteq(-\infty,x_n]$. Иначе говоря, A равно или $(-\infty,x_n)$ или $(-\infty,x_n]$.

7. Пусть $\Omega=\{1,2,...,10\}$, C – класс множеств $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,5,10\}$, $C=\{6,7\}$. Построить минимальную алгебру $A(C)$.

8. Дать определения верхнего и нижнего предела последовательности множеств $\{A_n\}_{n\geq 1}$. Показать, что

а) $A_* \subseteq A^*$,

б) $A^* = \bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\leq n} A_k$, $A_* = \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigcap\limits_{k\leq n} A_k$.

9. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \downarrow A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \uparrow A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$.

10. Привести пример последовательности множеств $\{A_n\}_{n\geq 1}$, для которых $A_* \neq A^*$.

11. Пусть X – множество, и $\{A_n\}_{n\geq 1}$ – последовательность множеств, $A_n \subseteq X$. Доказать, что:

а) $X \setminus \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (X \setminus A_n)$;

б) $X \setminus \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (X \setminus A_n)$.

12. Доказать, что

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (A_n \cup B_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \cup \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n$,

б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \cap \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n \subseteq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (A_n \cap B_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \cap \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n$.

13. Проверить следующие свойства индикатора

а) $\chi\{A\cup B\}=\chi\{A\}+\chi\{B\}-\chi\{A\cap B\}$;

б) $\chi\{A\Delta B\}=(\chi\{A\}-\chi\{B\})^2$;

в) $\chi\left\{\bigcup\limits_{k\geq 1} A_k\right\}=1-\prod\limits_{k\geq 1}(1-\chi\{A_k\})$;

г) $\chi\left\{\left(\bigcup\limits_{k\geq 1} A_k\right)^C\right\}=\prod\limits_{k\geq 1}(1-\chi\{A_k\})$.

14. Пусть $A_1,...,A_n$ – любые подмножества Ω, а B – множество всех таких точек, которые принадлежат ровно k множествам из числа $A_1,...,A_n$. Показать, что

$$\chi\{B\}=\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k} C_r^k \left[\sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq n} \chi\{A_{i_1}\cap ...\cap A_{i_r}\}\right].$$

15. Пусть $f:\Omega\to\Omega'$. Показать, что:

а) $f^{-1}(A'\setminus B')=f^{-1}(A')\setminus f^{-1}(B')$;

б) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha} A'_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha} f^{-1}(A'_\alpha)$;

в) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha} A'_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha} f^{-1}(A'_\alpha)$;

г) $f^{-1}(A'\Delta B')=f^{-1}(A')\Delta f^{-1}(B')$;

д) $f^{-1}\left((A')^C\right) = \left(f^{-1}(A')^C\right)$.

16. Если $f(\omega)$ измерима, то измеримы $f^+(\omega)$, $f^-(\omega)$, $|f(\omega)|$, $f^2(\omega)$. Показать.

17. Если функции $f:\Omega\to R$ и $g:\Omega\to R$ измеримы, то измеримо множество $\{\omega: f(\omega)>g(\omega)\}$. Показать.

18. Пусть $f(\omega)$ и $g(\omega)$ – измеримые функции. Показать, что $f(\omega)+g(\omega)$ и $f(\omega)-g(\omega)$ измеримы, $f(\omega)g(\omega)$ и $af(\omega)+bg(\omega)$ измеримы, $f(\omega)/g(\omega)$ измерима, если $g(\omega)\neq 0\ \forall\omega\in\Omega$.

19. Пусть $\{f_n(\omega)\}$ – последовательность измеримых функций, отображающих $\Omega\to\overline{R}$. Доказать измеримость $\sup\limits_{n\geq 1} f_n(\omega)$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(\omega)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(\omega)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(\omega)$.

20. Доказать, что функции x^n, $x^+ = \max\{0,x\}$, $x^- = -\min\{0,x\}$, $|x| = x^+ + x^-$ являются борелевскими.

21. Показать, что простая функция $f(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\chi\{A_j(\omega)\}$, где C_j – попарно различные числа, $\{A_j\}$ – разбиение Ω, является измеримой тогда и только тогда, когда измеримы все $\{A_j\}$.

Тема 2. Метрические пространства.

1. Доказать C_r-неравенство

$$|a+b|^r \leq C_r\left(|a|^r + |b|^r\right), \text{ где } r>0,\ C_r = \begin{cases} 1, & 0<r\leq 1;\\ 2^{r-1}, & r>1\end{cases}$$

2. Доказать неравенство Юнга

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ где } a\geq 0,\ b\geq 0,\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

3. Доказать неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

4. Доказать неравенство Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}, \text{ где } a_i\geq 0,\ b_i\geq 0,\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

5. Доказать неравенство Минковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}, \text{ где } p>1.$$

6. Является ли ρ метрикой на *R*, где

а) $\rho(x,y)=\min\{1,|x-y|\}$;

б) $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$;

в) $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$;

г) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$?

7. Пусть $R^n = \{x=(x_1,...,x_n): -\infty < x_i < +\infty, i=1,...,n\}$. Показать, что каждая из следующих

функций является метрикой:

а) $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$;

б) $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$;

в) $\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$

г) $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$, $p\ge 1$.

8. Пространство l_2 определяется как множество последовательностей $x=(x_1,x_2,...)$ вещественных или комплексных чисел таких, что $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty$, при этом $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$. Доказать, что (l_2,ρ) – метрическое пространство.

9. Пусть $x\in l_2$, $y\in l_2$, $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i-y_i|}{i}$. Показать, что (l_2,d) – метрическое пространство.

10. Показать, что множество l_p всех векторов $x=(x_1,x_2,...)$ с комплексными компонентами таких, что $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$ и с метрикой $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$ является метрическим пространством.

11. Дать определение пространств $C(a,b)$, $C_p(a,b)$ и проверить, что они метрические.

12. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой

а) $\rho(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$;

б) $\rho(x,y)=|e^x-e^y|$;

в) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$.

13. Показать, что множество E^m всех векторов $x=(x_1,...,x_m)$, $x_i\in R$, с расстоянием $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$ является полным метрическим пространством.

14. Доказать, что пространство $C[a,b]$ является полным.

15. Доказать, что пространство $C_p[a,b]$ является полным.

16. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность

а) $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$;

б) $y_n(t)=t^n-t^{2n}$?

17. Доказать, что всякая последовательность, сходящаяся в пространстве $C[a,b]$ будет сходящейся и в пространстве $L_2[a,b]$. Построить пример последовательности, сходящейся в $L_2[a,b]$, но не сходящейся в $C[a,b]$.

18. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $f(x)$, чтобы в метрике

$\rho(x,y)=\left|f(x)-f(y)\right|$ вещественная прямая была полным метрическим пространством?

19. Сходится ли последовательность $x_n(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}-\dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ в пространстве:

а) $C[0,1]$;

б) $C^1[0,1]$?

20. Дать определение сходимости почти всюду и по мере. Показать, что $M=\{\omega : f_n(\omega)\to f(w)\}^C=\bigcup\limits_{\varepsilon>0}A^*(\varepsilon)$ и вывести отсюда критерий сходимости почти всюду.

Тема 3. Множества в метрических пространствах.

1. Показать, что любой открытый шар является открытым множеством.

2. Показать, что класс τ всех открытых множеств метрического пространства (X,ρ) обладает следующими свойствами:

а) $\varnothing\in\tau$, $X\in\tau$,

б) τ замкнут относительно операции конечного пересечения;

в) τ замкнут относительно операции произвольного объединения.

3. Расстояние между непустыми множествами $A\subset X$ и $B\subset X$ метрического пространства (X,ρ) определяется по формуле $\rho(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}\rho(x,y)$. Если $A=\{x\}$, то пишут $\rho(x,B)$. Показать, что если A – непустое подмножество в X и x, y – точки в X, то $\left|\rho(x,A)-\rho(x,A)\right|\le\rho(x,y)$.

4. Диаметром произвольного непустого множества $A\subset X$ называют число $\delta(A)=\sup\limits_{x\in A,y\in A}\rho(x,y)$. Непустое множество A называется ограниченным, если $\delta(A)<\infty$. Показать, что объединение двух ограниченных множеств A и B ограничено.

5. ε-окрестностью непустого множества $A\subset X$ для любого $\varepsilon>0$ называют множество $V_\varepsilon(A)=\{x:\rho(x,A)<\varepsilon\}$. Показать, что $V_\varepsilon(A)$ – открытое множество.

6. Внутренностью множества $A\subset X$ называют множество A^0 всех внутренних точек. Показать, что:

а) A^0 – наибольшее открытое множество, содержащееся в A;

б) если $A\subset B$, то $A^0\subset B^0$;

в) для любой пары множеств A и B выполняется $\left(A\bigcap B\right)^0=A^0\bigcap B^0$.

7. Внутренняя точка множества $X\setminus A$ называется внешней точкой для A, а внутренность множества $X\setminus A$ называется множеством внешних точек A. Показать, что точка $x\in X$ – внешняя для A, если и только если $\rho(x,A)>0$.

8. Множество в метрическом пространстве называется замкнутым, если его дополнение открыто. Показать, что:

а) замкнутый шар – замкнутое множество, сфера – замкнутое множество,

б) пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто,

в) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

9. Точкой прикосновения множества A называется такая точка $x\in X$, каждая окрестность которой имеет с A непустое пересечение. Множество всех точек прикосновения множества A называется замыканием множества A и обозначается $[A]$. Показать, что:

а) замыкание множества A есть дополнение множества внешних точек A,

б) для любого множества A его замыкание есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A,

в) если $A \subset B$, то $[A] \subset [B]$,

г) для любой пары A и B выполняется $[A \cup B] = [A] \cup [B]$,

д) для того, чтобы точка $x \in X$ была точкой прикосновения множества A, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(x, A) = 0$.

10. Показать, что замыкание множества A есть пересечение открытых окрестностей множества A.

11. Показать, что любое замкнутое множество является пересечением убывающей последовательности открытых множеств; любое открытое множество является объединением возрастающей последовательности замкнутых множеств.

12. Показать, что множество $D \subset F$ открыто в F, если и только если $\exists A \subset X$, открытое в X, такое, что $D = A \cap F$.

13. Показать, что каждое множество $D \subset F$, открытое в F, является открытым в X тогда и только тогда, когда F открыто в X.

14. Показать, что для того, чтобы каждое множество $D \subset F$, замкнутое в F, было замкнуто в X, необходимо и достаточно, чтобы F было замкнуто в X.

15. Показать, что замыкание в F множества $D \subset F$ равно $[D] \cap F$, где $[D]$ – замыкание D в X.

16. Если x_0 – точка прикосновения множества $A \subset X$, и если отображение $f : X \to X$ непрерывно в точке x_0, то x_0 – точка прикосновения множества $f(A)$.

17. Пусть (X, ρ), (X', ρ'), (X'', ρ'') – метрические пространства, и пусть отображения $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$. Показать, что:

а) если $f(\omega)$ непрерывна в точке x_0, и $g(\omega)$ непрерывна в точке $f(x_0)$, то $h(\omega) = (f \circ g)(\omega)$ – непрерывная функция в точке x_0;

б) если $f(\omega)$ непрерывна в X, и $g(\omega)$ непрерывна в X', то $h(\omega) = (f \circ g)(\omega)$ – непрерывная функция в X.

Тема 4. Сходимость по мере и почти всюду.

1. Показать, что:

а) $f_n(\omega) \xrightarrow{\mu} f(\omega) \Rightarrow |f_n(\omega)| \xrightarrow{\mu} |f(\omega)|$;

б) $f_n(\omega) \xrightarrow{\mu} f(\omega), g_n(\omega) \xrightarrow{\mu} g(\omega) \Rightarrow af_n(\omega) + bg_n(\omega) \xrightarrow{\mu} af(\omega) + bg(\omega)$;

в) $f_n(\omega) \xrightarrow{\mu} f(\omega), g_n(\omega) \xrightarrow{\mu} g(\omega) \Rightarrow f_n(\omega) g_n(\omega) \xrightarrow{\mu} f(\omega) g(\omega)$.

2. Доказать, что последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2 + x^2}$ всюду на R сходится к нулю, но не равномерно.

3. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на отрезке [0,1].

4. Известно, что $f_n(\omega) \xrightarrow{\text{ï.â.}} f(\omega)$ и $f_n(\omega) \xrightarrow{\text{ï.â.}} g(\omega)$. Доказать, что $f(\omega)$ эквивалентна $g(\omega)$.

5. Известно, что $f_n(\omega) \xrightarrow{\mu} f(\omega)$ и $f_n(\omega) \xrightarrow{\mu} g(\omega)$. Доказать, что $f(\omega)$ эквивалентна $g(\omega)$.

6. Пусть $\Omega=\{r:r\in(0,1]\}$ – множество рациональных точек полуинтервала (0,1], M – полукольцо множеств $A_{a,b}=(a,b]\cap\Omega$, $0\le a\le b\le 1$ и $\mu(A_{a,b})=b-a$. Показать, что μ конечно-аддитивна на M, но не счетно-аддитивна.

7. Пусть $\Omega=\{\varpi_1,\omega_2,...\}$ – некоторое счетное множество, $F=S(\Omega)$. Положим $\mu(A)=0$, если A конечно, и $\mu(A)=\infty$, если A бесконечно. Показать, что функция множеств $\mu(A)$ конечно-аддитивна на F, но не счетно-аддитивна.

8. Пусть $\mu(A)$ – конечная мера на σ-алгебре F, $A_n\in F$, $n=1,2,...$ и $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ (т.е. $A=\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}A_n=\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}A_n$). Показать, что $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

5. Преподавательский состав, реализующий дисциплину

Конев Виктор Васильевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра системного анализа и математического моделирования, ведущий научный сотрудник, международная лаборатория статистики случайных процессов и количественного финансового анализа

6. **Язык преподавания** русский.