Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
_______________ Л. В.Гензе
«30» 06 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы топологии

по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.3.ДВ.03.06

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
_____________ Л.В. Гензе

Председатель УМК
_____________ Е.А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-4 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.

ПК-1 Способен проводить научно-исследовательские разработки по отдельным разделам выбранной темы.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 4.1 Проводит поиск и обработку научной и научно-технической информации, необходимой для решения исследовательских задач

ИОПК 4.2 Оценивает полученные результаты и формулирует выводы по итогам проведенных исследований

ИПК 1.1 Проводит работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований

ИПК 1.2 Подготавливает планы и программы проведения отдельных этапов научно-исследовательской работы

ИПК 1.3 Проводит отдельные этапы научно-исследовательской работы

2. Задачи освоения дисциплины

– расширение и углубление знаний, полученных студентами при освоении дисциплины «Топология»;

– приобретение умения применять полученные знания при решении теоретических вопросов в научных исследованиях.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Восьмой семестр, зачет

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Теория множеств, Топология.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 з.е., 72 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Введение.

Необходимые сведения из теории множеств. Кардиналы и их арифметика

Тема 2. Базы и предбазы. Аксиомы счетности.

Определение топологии с помощью базы и с помощью фундаментальных систем окрестностей.

Тема 3. Кардинальнозначные инварианты топологических пространств.

Мощность, вес, характер, плотность. Связь между этими инвариантами.

Тема 4. Непрерывные отображения. Открытые и замкнутые отображения. Гомеоморфизмы.

Критерии непрерывного отображения, критерии гомеоморфизма.

Тема 5. Аксиомы отделимости.

Связь между аксиомами отделимости и кардинальнозначными инвариантами. Тихоновские пространства.

Тема 6. Подпространства.

Поведение кардинальнозначных инвариантов и аксиом отделимости при переходе к подпространству. Наследственно нормальные пространства.

Тема 7. Произведения.

Теорема Хьюитта-Марчевского-Пондицери. Теорема об универсальности тихоновского куба. Поведение кардинальнозначных инвариантов и аксиом отделимости при переходе к произведениям.

Тема 8. Компактные пространства и операции над компактами.

Различные критерии компактности. Свойства компактных множеств. Примеры компактных пространств. Отрезки ординалов.

Тема 9. Компактификации.

Упорядочение на множестве всех компактификаций данного пространства. Минимальная (александровская) компактификация. Компактификация Чеха-Стоуна и расширение Волмэна.

Тема 10. Понятия, близкие к компактности.

Линделёфовы пространства, полные по Чеху пространства, счетно компактные, секвенциально компактные и псевдокомпактные пространства.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости и выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Домашние задания состоят: (а) в самостоятельном доказательстве следствий из доказанных на лекциях теорем; (б) в самостоятельной проработке доказательств тех теорем, чьи доказательства были изложены схематично.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет в восьмом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос (проверяются ИОПК-4.1, ИОПК-4.2) и две задачи (проверяются ИПК-1.1, ИПК-1.2 и ИПК-1.3). Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Базы и предбазы. Примеры. Теорема о выделении из любого семейства открытых множеств пространства X подсемейства мощности $w(X)$ с таким же объединением.

2. Базы и предбазы. Примеры. Теорема о выделении из любой базы пространства X базы мощности $w(X)$.

3. Непрерывные отображения топологических пространств. Критерии непрерывности. Открытые и замкнутые отображения.

4. Топология, порождённая семейством отображений.

5. Теорема Хьюитта-Марчевского-Пондицери.

6. Диагональ отображений. Теорема об универсальности тихоновского куба веса m для всех тихоновских пространств веса m.

7. Компактификации. Теорема о существовании максимальной компактификации.

8. Теорема о мощности и весе пространства βN.

9. Теорема о продолжении любого непрерывного отображения в компакт на расширение Чеха-Стоуна.

10. Ультрафильтры и конструкция расширения Волмэна.

11. Теорема о нормальности любого линделёфова пространства.

12. Полные по Чеху пространства. Теорема Бэра о категории.

Примеры задач:

1. Приведите пример непрерывного отображения $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которое

а) открыто-замкнуто;

б) открыто, но не замкнуто;

в) замкнуто, но не открыто;

г) не замкнуто и не открыто.

3. Покажите, что конечное T_1-пространство дискретно. Убедитесь, что в T_1-пространствах множество A^d (множество всех предельных точек множества A) обладает следующими свойствами: $(A^d)^d \subset A^d$; $A^d = \emptyset$, если A конечно.

4. Определите функцию $f: D(\mathfrak{c}) \to [0;1]$, которую нельзя непрерывно продолжить на компактификацию $A(\mathfrak{c}) \oplus A(\mathfrak{c})$ пространства $D(\mathfrak{c})$.

5. Покажите, что если любое открытое подпространство линделёфова пространства X само линделёфово, то пространство X наследственно линделёфово.

6. Приведите пример таких топологических пространств X, Y и Z что $\chi(X) < nw(X)$, $\chi(Y) = nw(Y)$ и $\chi(Z) > nw(Z)$.

7. Установите, что прямую Зоргенфрея можно непрерывно отобразить на счетное дискретное пространство, но нельзя непрерывно отобразить на несчетное дискретное пространство.

8. Докажите, что регулярность инвариантна относительно открыто-замкнутых отображений.

9. Докажите, что X – хаусдорфово пространство тогда и только тогда, когда диагональ Δ произведения $X \times X$ замкнута в $X \times X$.

10. Докажите, что если (X, τ_1) есть T_i-пространство с $i = 0,1,2$ и τ_2 - такая топология на X, что $\tau_1 \subset \tau_2$, то (X, τ_2) тоже является T_i-пространством. Покажите, что при $i \geq 3$ это неверно.

11. Пусть X – топологическое пространство. Непрерывное отображение $f: X \to X$ называется *ретракцией*, если $f \circ f = f$. Множество $f(X)$ в этом случае называется *ретрактом* пространства X. Докажите, что непрерывное отображение $f: X \to X$ является ретракцией если и только если $f(x) = x$ для всех $x \in f(X)$.

а) Докажите, что для произвольного подпространства M топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) M – ретракт пространства X;

(2) любое непрерывное отображение $f: M \to Y$ в произвольное топологическое пространство Y продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}: X \to Y$.

б) Докажите, что если X – хаусдорфово пространство, то всякий ретракт пространства X замкнут в X.

12. Определите функцию $f: D(\mathfrak{c}) \to [0; 1]$, которую нельзя непрерывно продолжить на компактификацию «Двойная окружность Александрова» пространства $D(\mathfrak{c})$.

13. Пусть X – произвольное непустое множество и $\rho: X \times X \to [0; +\infty)$ – отображение, заданное формулой $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y; \\ 0, x = y. \end{cases}$ Проверьте, что ρ – это метрика на множестве X и найдите, вес, характер и плотность получившегося топологического пространства.

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «незачтено».

Оценка	Критерии соответствия
зачтено	Ставится при выполнении не менее трех из следующих четырех условий: 1) выполнено не менее 50% домашних заданий 2) посещено не менее 80% занятий 3) студент ответил на теоретический вопрос без принципиальных ошибок в доказательствах и рассуждениях 4) студент правильно решил как минимум одну из предложенных задач, возможно, с некоторыми погрешностями и неточностями
незачтено	Ставится, если выполнено не более двух из следующих четырех условий: 1) выполнено не менее 50% домашних заданий 2) посещено не менее 80% занятий 3) студент ответил на теоретический вопрос без принципиальных ошибок в доказательствах и рассуждениях 4) студент правильно решил как минимум одну из предложенных задач, возможно, с некоторыми погрешностями и неточностями

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6764

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов:

Для качественного освоения дисциплины необходимо постоянно работать с конспектами лекций, и сразу выполнить все задания по лекции (это проверка простых фактов, повторение определений, доказательство простейших утверждений, выводы следствий из доказанных теорем). Кроме этого, самостоятельная работа студентов состоит в более глубоком изучении разделов дисциплины с помощью основной и дополнительной литературы. Перечень литературы по дисциплине находится в пункте 12.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. В.В Федорчук. Введение в топологию. М.: Изд-во МГУ, 2014. — 144 с.
2. Р. Энгелькинг. Общая топология. – М.: Мир, 1986.
3. А.В. Архангельский, В.И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

б) дополнительная литература:

1. Дж. Л. Келли. Общая топология. – М.: Наука, 1980.
2. Р.А. Александрян, Э.А. Мирзаханян. Общая топология. – М.: Высшая школа, 1979.
3. П.С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Физматлит, 2009. — 352 с.

в) ресурсы сети Интернет:

1. https://arxiv.org/archive/math
2. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm
3. https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6764
4. http://journals.tsu.ru/mathematics/

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение: нет необходимости;

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/

– ЭБС ZNANIUM.com – https://znanium.com/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Гензе Леонид Владимирович, к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа и теории функций