Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета

_______________ С.Н. Филимонов

«15» апреля 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

по направлению подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Фундаментальная физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2021

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.ДВ.01.01.03

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
_______________ О.Н. Чайковская

Председатель УМК
_______________ О.М. Сюсина

Томск – 2021

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК 1 – Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности;

– ПК 1 – Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.2 – Применяет физические и математические модели и методы при решении теоретических и прикладных задач

ИПК 1.2 Владеет практическими навыками использования современных методов исследования в выбранной области

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить концепции топологического пространства и гладкого многообразия как общего подхода к определению непрерывных и гладких структур на множествах.

– Сформирование представление о дифференциальной геометрии как неотъемлемой части понятийного аппарата современной теоретической и математической физики.

– Изучить основы геометрии гладких многообразий и связанных с ними дифференциально-геометрических конструкций;

– Освоить приложения дифференциальной геометрии для решения практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Семестр 5, зачет с оценкой, Семестр 6, экзамен.

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, классическая механика, тензорный анализ и интегральные уравнения (для обучения в 6-ом семестре).

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 з.е., 252 часа, из которых:

– лекции: 64 ч.;

–практические занятия: 64 ч.;

– в том числе практическая подготовка:64 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Тема 1. Основные понятия дифференциальной геометрии и топологии

Введение. Дифференциальная геометрия как язык теоретической физики.

Отображения, карты, атласы.

Определение и примеры гладких многообразий. Топология многообразия. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы. Гладкие отображения.

Касательное пространство. Касательное расслоение. Векторные поля. Интегральные кривые векторных полей. Теорема о выпрямляемости. Дифференциал гладкого отображения.

Подпространства и подмногообразия Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.

Факторпространства.

Хаусдорфовы пространства. Связные пространства. Аксиомы счетности. Компактные пространства.

Прямая сумма, тензорное произведение линейных пространств. Сопряженное и комплексно сопряженное пространства. Тензоры на линейном пространстве. Тензорный закон преобразования. Умножение тензоров. Тензорная алгебра. Свертка тензора. Тензоры как полилинейные функционалы. Подъем и опускание индексов. Подстановка индексов. Симметризация и альтернирование тензора. Внешняя алгебра на линейном пространстве.

Векторные расслоения. Операции с векторными расслоениями: прямая сумма, тензорное произведение, дуальное расслоение, тензорная алгебра. Подрасслоения и факторрасслоения, внешняя алгебра расслоения, редукция расслоения. Теоремы вложения.

Тема 2. Дифференциальное исчисление на многообразиях

Дифференцирования тензорных полей.

Переносы тензорных полей посредством диффеоморфизмов. Прообразы ковариантных тензорных полей при гладких отображениях. Поток, порожденный векторным полем. Производная Ли. Векторные поля Киллинга.

Внешний дифференциал. Свертка и производная Ли дифференциальной формы. Оператор Ходжа. Примеры. Операции классического векторного анализа. Инвариантная форма уравнений Максвелла.

Ковариантное дифференцирование, ковариантный дифференциал на векторном расслоении. Линейная связность как поле горизонтальных подпространств. Параллельный перенос в векторном расслоении, группа голономии. Тензор кривизны связности в векторном расслоении. Связности на метризованных векторных расслоениях.

Тема 3. Разбиение единицы.

Паракомпактные пространства. Разбиение единицы. Простейшие приложения разбиения единицы.

Тема 4. Интегрирование на многообразии.

Интегрирование дифференциальных форм в R^n. Интегрирование по цепям. Теоремы Стокса для интеграла по цепям. Ориентируемые многообразия. Интегрирование по ориентированному многообразию. Теорема Стокса. Интегрирование на римановом многообразии. Интегрирование на группе Ли

Тема 5. Когомологии многообразий

Понятие о когомологиях де Рама. Редукция и гомотопическая инвариантность когомологий де Рама. Разложение Ходжа – де Рама. Лемма Пуаннкаре. Примеры вычисления когомологий де Рама. Когомологии сфер. Когомологии Чеха. Изоморфизм де Рама – Чеха. Сингулярные гомологии и когомологии. Изоморфизм де Рама. Элементы гомологической алгебры. Последовательность Майера – Вьеториса. Характеристические классы, характеры Чженя и Понтрягина векторного расслоения. Характеристический класс Эйлера векторного расслоения. Эйлерова характеристика многообразия.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки и обсуждения задач и коллоквиума и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет с оценкой в пятом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. После ответа на билет студенту отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач, направленные на проверку достижения ИОПК 1.2 и ИПК 1.2.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Касательное расслоение. Гладкая структура на касательном расслоении.

Каноническая проекция. Механическая интерпретация касательного расслоения.

Вопрос 2. Компактные топологические пространства. Критерии компактности. Непрерывное отображение компактного пространства. Факторпространство компактного пространства. Компактность замкнутых и замкнутость компактных множеств компактного пространства. Критерий компактного множества в R^n.

Примеры задач:

Задача 1. Докажите, что:

1) для любого подмножества W замыкание $\overline{W}$ есть пересечение всех замкнутых подмножеств содержащих W.

2) множество W замкнуто тогда, и только тогда, когда $W = \overline{W}$.

3) для любого подмножества W имеем $\overline{\overline{W}} = \overline{W}$.

4) для любых подмножеств $W_i \subset X, i = 1, \ldots, n$ имеем $\overline{W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n} = \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2 \cup \ldots \cup \overline{W}_n$.

5) если $W_1 \subset W_2$, то $\overline{W}_1 \subset \overline{W}_2$.

Задача 2. Найдите интегральные кривые векторных полей $X = e^x \dfrac{\partial}{\partial x}$ и $X = (1 + x^2)\dfrac{\partial}{\partial x}$ на прямой. Докажите, что эти векторные поля неполные.

Задача 3. Билинейная форма $(\ ,\ )$ на конечномерном линейном пространстве V определяет изоморфизм $\varphi : V \to V^*$. Найти явное выражение для φ во взаимно дуальных базисах пространств V и V^* через матрицу $J = (J_{ab})$ билинейной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится при правильном ответе студентом на оба теоретических вопроса, решении не менее двух задач экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 80% правильных ответов, демонстрирует понимание взаимосвязей между различными понятиями, свободно владеет терминологией.

Оценка «хорошо» ставится при правильном ответе студентом не менее чем на один теоретический вопрос, решении не менее двух задач экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 60% правильных ответов, демонстрирует понимание большинства пройденных тем, свободно владеет терминологией.

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном ответе студентом не менее чем на один теоретический вопрос, решении не менее одной задачи экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 50% правильных ответов, демонстрирует понимание большинства пройденных тем, владеет терминологией.

Если ответ студента не удовлетворяет критериям оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», то ставится оценка «неудовлетворительно».

Если по результатам текущего контроля (коллоквиума) студент имеет оценку «отлично», то это засчитывается за правильный ответ на первый теоретический вопрос билета на дифференцированном зачете.

Экзамен в 6 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам. Билет содержит два теоретических вопроса, направленных на проверку достижения ИОПК 1.2 и три задачи, решение которых демонстрирует достижение ИПК 1.2 Продолжительность подготовки к ответу на билет 1,5 часа. После ответа на билет студенту отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов (проверка достижения ИОПК 1.2) и открытого перечня задач (проверку достижения ИПК 1.2).

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Вычисление параллельного переноса вдоль замкнутой кривой. Тензор кривизны связности в векторном расслоении. Оператор кривизны. Выражение параллельного переноса вдоль бесконечно малой петли через оператор кривизны.

Вопрос 2. Определение интеграла по области с регулярной границей. Независимость интеграла от выбора покрытия и разбиения единицы. Формула замены переменных. Теорема Стокса для интеграла по области с регулярной границей.

Задача 1. Покажите, что вторая пара уравнений Максвелла в вакууме записывается в виде $*\mathrm{d}*F=\frac{4\pi}{c}J$, или, равносильно, $\delta F=\frac{4\pi}{c}J$.

Задача 2. Пусть $F_{ab}(x)$ — тензор напряж$\ddot{\chi}$нности электромагнитного поля в пространстве Минковского. Прямым вычислением проверьте, что формула $A_a(x)=\int_0^1 tF_{ba}(tx)x^b\,\mathrm{d}t$ определяет четыр$\ddot{\chi}$хмерный потенциал поля.

Задача 3. Вычислите $H^1(\mathbb{S}^1)$ с помощью четырех-хэлементного покрытия дугами окружностей (полуокружностями).

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Студенты, получившие на зачете с оценкой за пятый семестр оценку «неудовлетворительно» или «не аттестован» к экзамену по дисциплине не допускаются.

Оценка за экзамен, как правило, не может быть выше оценки за дифференцированный зачет в пятом семестре.

При этом оценка «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно» ставится при правильном ответе студентом не менее чем на один теоретический вопрос, решении не менее одной задачи экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 50% правильных ответов, демонстрирует понимание большинства пройденных тем, владеет терминологией.

Если ответ студента не удовлетворяет критериям оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», то ставится оценка «неудовлетворительно».

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» -
https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=96 https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=24827

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине состоят из открытого перечня вопросов, выносимых на коллоквиум, зачет с оценкой и экзамен и открытого перечня задач.

Открытый перечень вопросов, выносимых на коллоквиум по теме 1.

1. Отображение множеств. Образ и прообраз множества при отображении. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений. Тождественное отображение. Определение и критерий существования обратного отображения. Сужение отображения на подмножество.
2. Открытые подмножества в R^n и C^n. Класс гладкости отображения. Якобиан отображения, цепное правило для якобианов. Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы областей в R^n и C^n . Биголоморфизмы. Теорема об обратном отображении (без доказательства). Критерий диффеоморфизма областей в R^n .
3. Карта на множестве. Носитель карты, картирующее отображение, локальные координаты. Отображения и функции перехода. Согласованные карты. Атлас на множестве. Максимальный атлас. Теорема о максимальном атласе (без доказательства). Эквивалентные атласы. Гладкая структура. Определение топологического, гладкого и комплексного многообразия. Класс гладкости многообразия. Размерность многообразия.
4. Стандартная гладкость на R^n . Элементарные многообразия. Гладкость на множестве матриц данного размера. Гладкость на общей линейной группе. Пример нестандартной гладкости на R^1 .
5. Гладкая структура на окружности. Сферы S^n . Стерографические проекции n - мерной сферы. S^2 как комплексное многообразие. Вещественное и комплексное проективные пространства. Гладкость на RP^n и CP^n . Диффеоморфизмы RP^1 и S^1 и CP^1 и S^2 .
6. Гладкие поверхности как многообразия. Прямое произведение многообразий.
7. Топология многообразия, индуцированная гладкостью. Критерий открытого множества многообразия. Открытые множества многообразия, покрываемые одной картой. Открытость носителей карт многообразия.
8. Топологическое пространство. Тривиальная топология. Дискретная топология. Окрестность точки. Критерий открытого множества. База топологии. Критерий базы. База окрестностей точки топологического пространства. Критерий базы окрестностей точки. Сравнение топологий.
9. Естественная топология в R^n . Базы и базы окрестностей точек естественной топологии. Определение и примеры метрических пространств. Доказательство неравенства треугольника и неравенства Коши — Буняковского в R^n . Примеры метрик в R^n и в функциональных пространствах. Топология метрического пространства, индуцированная метрикой.
10. Замкнутые подмножества топологического пространства. Свойства замкнутых подмножеств. Замыкание множества. Критерий принадлежности точки замыканию множества. Внутренность множества. Граница множества.
11. Непрерывное отображение топологических пространств. Непрерывность отображения в точке. Критерии непрерывного отображения. Критерий непрерывности отображения метрических пространств. Непрерывность композиции непрерывных

отображений. Открытые и замкнутые отображения. Примеры открытого не непрерывного и непрерывного не открытого отображений. Гомеоморфизм топологических пространств. Гомеоморфные топологические пространства. Открытость и замкнутость гомеоморфизмов.

12. Локально евклидовы топологические пространства. Совпадение категорий локально евклидовых топологических пространств и топологических многообразий. Теоремы существования гладких структур (без доказательства). Альтернативное определение многообразия.

13. Определение гладкого отображения многообразий. Гладкость композиции гладких отображений. Гладкость тождественного отображения. Диффеоморфизм. Диффеоморфные многообразия. Матрица Якоби и ранг отображения. Независимость ранга отображения от выбора карты. Локально плоское отображение. Теорема о локально плоском отображении.

14. Непрерывная функция на топологическом пространстве. Гладкая функция на многообразии. Алгебры непрерывных и гладких функций. Кривая в топологическом пространстве. Гладкая кривая в многообразии. Носитель кривой. Кривые с замкнутым интервалом параметра. Начало кривой, конец кривой. Замкнутая кривая. Гладкая замкнутая кривая.

15. Касательный вектор в точке многообразия. Касательное пространство. Голономный базис в касательном пространстве. Интерпретация касательного вектора к гладкой поверхности. Примеры: сфера и специальная линейная группа.

16. Касательное расслоение. Гладкая структура на касательном расслоении. Каноническая проекция. Механическая интерпретация касательного расслоения. 18. Векторное поле. Локальное представление векторного поля в карте. Векторные поля как дифференцирования. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Совпадение алгебры Ли векторных полей с алгеброй дифференцирований функций на многообразии (доказательство для R^n). Умножение векторного поля на функцию.

17. Определение алгебры. Коммутативные, ассоциативные и унитальные алгебры. Размерность алгебры. Алгебры Ли. Примеры алгебр. Построение алгебры Ли из ассоциативной алгебры. Дифференцирование алгебры. Алгебра Ли дифференцирований произвольной алгебры.

18. Дифференциал гладкого отображения в точке. Матрица дифференциала. Дифференциал как отображение касательных расслоений. Представление дифференциала в локальных координатах. Доказательство формулы $(((d\varphi)V) f) \cdot\varphi = V(f \cdot\varphi)$. φ -связанные векторные поля. Алгебра Ли φ -связанных векторных полей. Инвариантное определение векторного поля как дифференцирования через дифференциал гладкой функции.

19. Подпространства топологического пространства. Наследственная топология. Непрерывность сужения непрерывного отображения на подпространство. Погруженные и вложенные подмногообразия. Локальные координаты, согласованные с подмногообразием. Касательное пространство к подмногообразию. Алгебра Ли векторных полей, касающихся подмногообразия.

20. Интегральные кривые векторного поля. Дифференциальное уравнение интегральной кривой. Максимальные интегральные кривые. Полные векторные поля. Теорема существования и единственности максимальной интегральной кривой векторного поля. Особые точки векторного поля. Теорема о выпрямляемости траекторий векторного поля. Выпрямляющие координаты. Перепараметризация интегральных кривых.

21. Поля подпространств. Распределения. Интегральные многообразия распределений. Слоения. Листы слоения. Примеры вполне интегрируемых и неинтегрируемых распределений.

22. Инволютивные распределения. Критерий полной интегрируемости распределения. Теорема Фробениуса. Трансверсальное сечение слоения. Существование локальных трансверсальных сечений. Факторизуемое слоение. Фактормногообразие слоения.

Открытый Перечень выносимых на зачет с оценкой по теме 1.

1. Отображение множеств. Образ и прообраз множества при отображении. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений. Тождественное отображение. Определение и критерий существования обратного отображения. Сужение отображения на подмножество.

2. Открытые подмножества в R^n и C^n. Класс гладкости отображения. Якобиан отображения, цепное правило для якобианов. Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы областей в R^n и C^n . Биголоморфизмы. Теорема об обратном отображении (без доказательства). Критерий диффеоморфизма областей в R^n .

3. Карта на множестве. Носитель карты, картирующее отображение, локальные координаты. Отображения и функции перехода. Согласованные карты. Атлас на множестве. Максимальный атлас. Теорема о максимальном атласе (без доказательства). Эквивалентные атласы. Гладкая структура. Определение топологического, гладкого и комплексного многообразия. Класс гладкости многообразия. Размерность многообразия.

4. Стандартная гладкость на R^n . Элементарные многообразия. Гладкость на множестве матриц данного размера. Гладкость на общей линейной группе. Пример нестандартной гладкости на R^1 .

5. Гладкая структура на окружности. Сферы S^n . Стерографические проекции n - мерной сферы. S^2 как комплексное многообразие. Вещественное и комплексное проективные пространства. Гладкость на RP^n и CP^n . Диффеоморфизмы RP^1 и S^1 и CP^1 и S^2 .

6. Гладкие поверхности как многообразия. Прямое произведение многообразий.

7. Топология многообразия, индуцированная гладкостью. Критерий открытого множества многообразия. Открытые множества многообразия, покрываемые одной картой. Открытость носителей карт многообразия.

8. Топологическое пространство. Тривиальная топология. Дискретная топология. Окрестность точки. Критерий открытого множества. База топологии. Критерий базы. База окрестностей точки топологического пространства. Критерий базы окрестностей точки. Сравнение топологий.

9. Естественная топология в R^n . Базы и базы окрестностей точек естественной топологии. Определение и примеры метрических пространств. Доказательство неравенства треугольника и неравенства Коши — Буняковского в R^n . Примеры метрик в R^n и в функциональных пространствах. Топология метрического пространства, индуцированная метрикой.

10. Замкнутые подмножества топологического пространства. Свойства замкнутых подмножеств. Замыкание множества. Критерий принадлежности точки замыканию множества. Внутренность множества. Граница множества.

11. Непрерывное отображение топологических пространств. Непрерывность отображения в точке. Критерии непрерывного отображения. Критерий непрерывности отображения метрических пространств. Непрерывность композиции непрерывных отображений. Открытые и замкнутые отображения. Примеры открытого не непрерывного и непрерывного не открытого отображений. Гомеоморфизм топологических пространств. Гомеоморфные топологические пространства. Открытость и замкнутость гомеоморфизмов.

12. Локально евклидовы топологические пространства. Совпадение категорий локально евклидовых топологических пространств и топологических многообразий. Теоремы

существования гладких структур (без доказательства). Альтернативное определение многообразия.
13. Определение гладкого отображения многообразий. Гладкость композиции гладких отображений. Гладкость тождественного отображения. Диффеоморфизм. Диффеоморфные многообразия. Матрица Якоби и ранг отображения. Независимость ранга отображения от выбора карты. Локально плоское отображение. Теорема о локально плоском отображении.
14. Непрерывная функция на топологическом пространстве. Гладкая функция на многообразии. Алгебры непрерывных и гладких функций. Кривая в топологическом пространстве. Гладкая кривая в многообразии. Носитель кривой. Кривые с замкнутым интервалом параметра. Начало кривой, конец кривой. Замкнутая кривая. Гладкая замкнутая кривая.
15. Касательный вектор в точке многообразия. Касательное пространство. Голономный базис в касательном пространстве. Интерпретация касательного вектора к гладкой поверхности. Примеры: сфера и специальная линейная группа.
16. Касательное расслоение. Гладкая структура на касательном расслоении. Каноническая проекция. Механическая интерпретация касательного расслоения. 18. Векторное поле. Локальное представление векторного поля в карте. Векторные поля как дифференцирования. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Совпадение алгебры Ли векторных полей с алгеброй дифференцирований функций на многообразии (доказательство для R^n). Умножение векторного поля на функцию.
17. Определение алгебры. Коммутативные, ассоциативные и унитальные алгебры. Размерность алгебры. Алгебры Ли. Примеры алгебр. Построение алгебры Ли из ассоциативной алгебры. Дифференцирование алгебры. Алгебра Ли дифференцирований произвольной алгебры.
18. Дифференциал гладкого отображения в точке. Матрица дифференциала. Дифференциал как отображение касательных расслоений. Представление дифференциала в локальных координатах. Доказательство формулы $(((d\varphi)V)\, f\,) \cdot \varphi = V(\, f \cdot \varphi\,)$. φ -связанные векторные поля. Алгебра Ли φ -связанных векторных полей. Инвариантное определение векторного поля как дифференцирования через дифференциал гладкой функции.
19. Подпространства топологического пространства. Наследственная топология. Непрерывность сужения непрерывного отображения на подпространство. Погруженные и вложенные подмногообразия. Локальные координаты, согласованные с подмногообразием. Касательное пространство к подмногообразию. Алгебра Ли векторных полей, касающихся подмногообразия.
20. Интегральные кривые векторного поля. Дифференциальное уравнение интегральной кривой. Максимальные интегральные кривые. Полные векторные поля. Теорема существования и единственности максимальной интегральной кривой векторного поля. Особые точки векторного поля. Теорема о выпрямляемости траекторий векторного поля. Выпрямляющие координаты. Перепараметризация интегральных кривых.
21. Поля подпространств. Распределения. Интегральные многообразия распределений. Слоения. Листы слоения. Примеры вполне интегрируемых и неинтегрируемых распределений.
22. Инволютивные распределения. Критерий полной интегрируемости распределения. Теорема Фробениуса. Трансверсальное сечение слоения. Существование локальных трансверсальных сечений. Факторизуемое слоение. Фактормногообразие слоения.
23. Отношение эквивалентности. Фактормножество. Каноническая проекция. Факторпространство линейного пространства по подпространству. Фактортопология. Характеристика фактортопологии с помощью канонической проекции.
24. Аксиома Хаусдорфа. Отделимость топологии, согласованной с метрикой. Нехаусдорфова прямая. Единственность предела последовательности и замкнутость

точек в хаусдорфовом пространстве. Замкнутость подмножеств, определенных системой уравнений. Хаусдорфовость и замкнутость диагонали квадрата.
25. Связные, линейно связные и локально линейно связные пространства. Сохранение (линейной) связности при непрерывном отображении. (Линейная) связность объединения множеств, имеющих общую точку. Компоненты линейной связности, их открытость и замкнутость. Эквивалентность связности и линейной связности. Локальная линейная связность многообразий. Примеры связных и несвязных пространств.
26. Первая и вторая аксиомы счетности, их взаимоотношение. Критерий непрерывности отображения в точке в терминах последовательностей. Покрытие топологического пространства. Теорема Линделефа.
27. Лемма Бореля — Лебега (без доказательства). Компактные топологические пространства. Критерии компактности. Непрерывное отображение компактного пространства. Факторпространство компактного пространства. Компактность замкнутых и замкнутость компактных множеств компактного пространства. Критерий компактного множества в R^n.
28. Примеры компактных пространств: S^n ,T^n ,RP^n ,CP^n . Примеры некомпактных пространств. Существование предельной точки бесконечного множества в компактном пространстве. Теорема Вейерштрасса. Носитель функции. Локально компактные топологические пространства. Примеры. Локальная компактность многообразий.
29. Теорема Уитни (без доказательства). Невложимость компактных комплексных многообразий в C^n . Понятие проективно-алгебраического многообразия. Многообразие Грассмана как проективно-алгебраическое многообразие.
30. Прямая сумма линейных подпространств. Размерность прямой суммы линейных подпространств. Примеры. Дополнительное подпространство. Существование дополнительного подпространства. Прямая сумма линейных пространств. Прямая сумма линейных операторов. Матрица прямой суммы линейных операторов.
31. Линейный функционал. Сопряженное пространство. Дуальный базис сопряженного пространства. Транспонированный оператор. Матрица транспонированного оператора. Невырожденная билинейная форма на конечномерном пространстве как изоморфизм.
32. Полулинейный функционал. Комплексно-сопряженное пространство. Дуальный базис комплексно-сопряженного пространства. Сопряженный оператор. Матрица сопряженного оператора. Невырожденная полуторалинейная форма на конечномерном пространстве как изоморфизм.
33. Тензорное произведение линейных пространств. Размерность тензорного произведения. Тензорное произведение линейных операторов и матриц. Матрица тензорного произведения линейных операторов.
34. Тензор на вещественном линейном пространстве. Тип тензора. Тензоры типа (0 1), (1 0), (0 0), . Базис в пространстве тензоров. Компоненты тензора. Тензорный закон преобразования компонент тензора при замене базиса. Тензоры на комплексном линейном пространстве.
35. Умножение тензоров. Свертка тензора. Тензоры как полилинейные функционалы. Примеры. Подъем и опускание индексов тензора.
36. Подстановка индексов тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры. Примеры. (Частичная) симметризация и альтернирование тензора. Критерий (косо)симметрического тензора. Альтернирование (симметризация) частично альтернированного (соответственно, симметризованного) тензора.
37. q -формы на линейном пространстве. Внешнее умножение q -форм. Свойства внешнего умножения. Внешняя алгебра. Подалгебра форм четной степени. Критерий линейной независимости ковекторов. Базис, размерность внешней алгебры. Разложимые q -формы.

38. Определение векторного расслоения. Тотальное пространство, база, проекция, тривиализирующая окрестность, ранг расслоения. Сечение векторного расслоения. Сложение сечений и умножение сечений на функции. Тривиальное векторное расслоение. Тривиализирующий базис. Морфизмы векторных расслоений. Эквивалентные расслоения.
39.Функции склейки векторного расслоения. Определение векторного расслоения по функциям склейки.
40. Тавтологическое векторное расслоение над проективным пространством

Открытый перечень вопросов, выносимых на экзамен по теме 1
1. Сумма Уитни векторных расслоений. Тензорное произведение векторных расслоений. Дуальное расслоение. Сечения дуального расслоения как ( )F M -линейные функционалы на сечениях расслоения.
2. Касательное и кокасательное расслоения к многообразию: тривиализирующие окрестности, тривилизирующие базисы, функции склейки, сечения. Линейные дифференциальные формы как -линейные функционалы на векторных полях. Дифференциал гладкой функции как линейная дифференциальная форма.
3. Тензорная алгебра векторного расслоения. Операции в тензорной алгебре. Кси-тензорные поля как F(M)-полилинейные функционалы. Тензорная алгебра над многообразием.
4. Симметризация и альтернирование кси-тензорных полей. Внешняя алгебра векторного расслоения. Дифференциальные формы.

Открытый перечень вопросов, выносимых на экзамен по темам 2,3
1. Переносы тензорных полей посредством диффеоморфизмов. Поток, порожденный векторным полем. Определение, свойства производной Ли.
2. Вычисление производной Ли тензорного поля.
3. Векторные поля Киллинга. Алгебра Ли векторных полей Киллинга. Векторы Киллинга пространства Минковского. Конечномерность алгебры Ли векторных полей Киллинга на римановом многообразии (без доказательства).
4. Переносы ковариантных тензорных полей посредством гладких отображений.
5. Антидифференцирования внешней алгебры. Внешний дифференциал. Свойства внешнего дифференциала. Формула Пале.
6. Свертка дифференциальной формы как антидифференцирование. Производная Ли дифференциальной формы.
7. Форма объема, ковариантный и контравариантный тензоры Леви-Чивита на (псевдо)римановом многообразии. Оператор Ходжа на (псевдо)римановом многообразии. Квадрат оператора Ходжа. Интерпретация элементарного векторного анализа на языке внешней алгебры. Оператор присоединенного внешнего дифференцирования и оператор Лапласа во внешней алгебре.
8. Инвариантная форма уравнений Максвелла. Потенциал электромагнитного поля.
9. Ковариантное дифференцирование в векторном расслоении. Выражение ковариантного дифференцирования в локальных координатах. Крэффициенты связности. Формула преобразования коэффициентов связности. Ковариантный дифференциал. Матрица один-формы связности. Формула преобразования один-форм связности. Ковариантное дифференцирование произвольных кси-тензорных полей.
10. Пространство аффинной связности. Коэффициенты аффинной связности. Формула преобразования коэффициентов аффинной связности.
11. Вертикальные векторы и вертикальные векторные поля на векторном расслоении, их выражение в локальных координатах. Горизонтальные векторы и поля горизонтальных подпространств в векторном расслоении. Связность в векторном

расслоении. Отождествление связностей с ковариантными дифференцированиями. Связности как проекторы. Горизонтальные дифференциальные формы.
12. Горизонтальная кривая. Уравнения горизонтальной кривой. Горизонтальные подъемы. Поле параллельных векторов и параллельный перенос вдоль кривой. Существование и единственность параллельного переноса. Геодезические. Геометрический смысл ковариантного дифференцирования.
13. Операторы параллельного переноса в векторном расслоении, их свойства. Группа голономии векторного расслоения. Суженная группа голономии. Теорема редукции. Тривиальность векторных расслоений над тривиальной базой.
14. Вычисление параллельного переноса вдоль замкнутой кривой. Тензор кривизны связности в векторном расслоении. Оператор кривизны. Выражение параллельного переноса вдоль бесконечно малой петли через оператор кривизны.
15. Матрица форм кривизны связности в векторном расслоении. Структурные уравнения Картана. Тождество Бианки. Ковариантный внешний дифференциал. Квадрат ковариантного внешнего дифференциала. Выражение тензора кривизны через ковариантное дифференцирование. Тензор кручения аффинной связности.
16. Плоские связности и интегрируемые поля горизонтальных подпространств. Критерии плоской связности. Суженная группа голономии плоской связности.
17. Связности в метризованных расслоениях.
18. Измельчения покрытий. Паракомпактность. Достаточные условия паракомпактности (без доказательства). Разбиение единицы на многообразии. Разбиение единицы, подчиненное покрытию. Существование разбиения единицы.
19. Существование слабой функции Урысона. Метризуемость векторных расслоений. Существование связности на векторном расслоении.

Открытый перечень вопросов, выносимых на экзамен по теме 4
1. Ориентируемые многообразие. Число ориентаций на многообразии. Критерий ориентируемости. Ориентируемость поверхностей в R^n, заданных системой уравнений. Область с регулярной границей. Ориентация, порожденная на границе области.
2. Стандартные симплексы. Сингулярные симплексы и цепи. Граничный оператор. Нильпотентность граничного оператора. Циклы и границы.
3. Интегрирование дифференциальной формы по области в R^n. Интегрирование по цепи. Теорема Стокса для интеграла по цепи.
4. Определение интеграла по области с регулярной границей. Независимость интеграла от выбора покрытия и разбиения единицы. Формула замены переменных. Теорема Стокса для интеграла по области с регулярной границей.
5. Интегрирование на римановом многообразии. Теорема Гаусса.
6. Свойства левоинвариантных дифференциальных форм старшей степени на группе Ли. Интегрирование на группе Ли. Унимодулярная группа Ли. Свойства интеграла на унимодулярной группе Ли. Унимодулярность компактной группы Ли. Существование и единственность меры Хаара на компактной группе Ли.

Открытый перечень вопросов, выносимых на экзамен по теме 5.
1. Замкнутые и точные дифференциальные формы. Когомологии де Рама. Гомоморфизм когомологий де Рама, порожденный гладким отображением многообразий.
2. Теорема редукции для когомологий де Рама. Лемма Пуанкаре. Гомотопные отображения. Гомотопные многообразия. Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама. Нулевая группа когомологий де Рама.
3. Разложение Ходжа внешней алгебры на шаре. Лемма Пуанкаре для когомологий де Рама.

4. Вычисление группы когомологий де Рама n-мерной сферы. Старшая группа когомологий де Рама компактного ориентируемого многообразия.
5. Коцепи относительно данного покрытия. Оператор кограницы коцепи, его нильпотентность. Коцикл, кограница и когомологии Чеха покрытия. Покрытие Лере. Существование покрытия Лере (без доказательства). Изоморфизм де Рама — Чеха.
6. Группы сингулярных гомологий и когомологий многообразия, их гомотопическая инвариантность. Сингулярные гомологии и когомологии точки. Явная формула изоморфизма де Рама. Теорема де Рама (без доказательства).
7. Дифференциальные векторные пространства. Гомоморфизм дифференциальных пространств. Дифференциальное факторпространство. Короткая точная последовательность. Коциклы, кограницы и когомологии дифференциального векторного пространства. Гомоморфизм когомологий, порожденный гомоморфизмом дифференциальных пространств. Гомотопные гомоморфизмы. Стягивающая гомотопия. Канонический базис конечномерного дифференциального пространства.
8. Гомоморфизм Бокштейна. Точность треугольной диаграммы когомологий, порожденной короткой точной последовательностью. Гомоморфизмы комплексов. Длинная точная последовательность когомологий, порожденная короткой точной последовательностью дифференциальных пространств.
9. Градуированные векторные пространства. Комплексы векторных пространств. Комплекс де Рама. Комплекс Дольбо. Комплекс вещественных коцепей. Сингулярный цепной комплекс. Сингулярный коцепной комплекс.
10. Последовательность Майера - Вьеториса. Точность последовательности Майера - Вьеториса. Вычисление когомологий сфер с помощью теоремы Майера - Вьеториса. Теорема Жордана. Достаточные условия конечномерности когомологий де Рама.
11. Инвариантные многочлены. Определение характеристических классов векторного расслоения по инвариантным многочленам. Независимость характеристических классов от выбора связности. Свойства характеристических классов, соответствующих однородным инвариантным многочленам. Алгебра характеристических классов. Характеристические классы Чженя и Понтрягина. Свойства характеристических классов Чженя и Понтрягина. Характеры Чженя и Понтрягина, их свойства (без доказательства). Определение чисел Чженя и Понтрягина, их свойства (без доказательста). Определение характеристических классов многообразия.
12. Канонический вид невырожденной кососимметрической билинейной формы на линейном пространстве. Определение и свойства пфаффиана кососимметрической матрицы. Симплектическое линейное пространство. Симплектический базис. Линейное каноническое преобразование. Симплектическая матрица, симплектическая группа. Унимодулярность симплектических матриц.
13. Определение характеристического класса Эйлера векторного расслоения. Независимость класса Эйлера от выбора метрики и согласованной связности. Свойства класса Эйлера. Эйлерова характеристика многообразия. Связь эйлеровой характеристики с числами Бетти (без доказательства). Вычисление эйлерова характеристического класса и эйлеровой характеристики двумерной сферы. Теорема «о еже».

Открытый перечень задач по теме 1.

1. Докажите, что отображение φ плоского кольца $1 < x^2 + y^2 < 2$ на кольцо $1 < x^2 + y^2 < 4$, заданное формулой $\varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ имеет якобиан, всюду отличный от нуля, но не биективно.

2. Доказать, что картами стандартной гладкости на $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) являются пары вида (U,h), где U — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), а h — произвольные диффеоморфизмы множеств U на открытые множества $h(U)\subset\mathbb{R}^n$ (соответственно, $h(U)\subset\mathbb{C}^n$).

3. Покажите, что четыре карты на $\mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned}
(U^{(+)},h^{(+)}) &= (\{p=(x,y)\in\mathbb{S}^1 \mid y>0\}, h^{(+)}(p)=x),\\
(U^{(-)},h^{(-)}) &= (\{p=(x,y)\in\mathbb{S}^1 \mid y<0\}, h^{(-)}(p)=x),\\
(V^{(+)},k^{(+)}) &= (\{p=(x,y)\in\mathbb{S}^1 \mid x>0\}, k^{(+)}(p)=y),\\
(V^{(-)},k^{(-)}) &= (\{p=(x,y)\in\mathbb{S}^1 \mid x<0\}, k^{(-)}(p)=y),
\end{aligned}$$

носители которых состоят из дуг полуокружностей, а картирующие отображения совпадают с проектированиями на координатные оси, образуют атлас, эквивалентный атласу построенному с помощью двух стереографических проекций.

4. Докажите, что якобиан перехода между картами атласа на гладкой поверхности, заданной системой уравнений, построенный в лекциях, отличен от нуля.

5. Установите диффеоморфизм $\mathbb{RP}^1\cong\mathbb{S}^1$.

6. Проверить согласованность карт атласа на многообразии Грассмана, построенного в лекциях.

7. Докажите, что:

1) для любого подмножества W замыкание $\overline{W}$ есть пересечение всех замкнутых подмножеств содержащих W.

2) множество W замкнуто тогда, и только тогда, когда $W=\overline{W}$.

3) для любого подмножества W имеем $\overline{\overline{W}}=\overline{W}$.

4) для любых подмножеств $W_i\subset X, i=1,\ldots,n$ имеем $\overline{W_1\cup W_2\cup\ldots\cup W_n}=\overline{W}_1\cup\overline{W}_2\cup\ldots\cup\overline{W}_n$.

5) если $W_1\subset W_2$, то $\overline{W}_1\subset\overline{W}_2$.

8. Докажите, что:

1) $\overline{W}=W\cup W'=W\cup\partial W$;

2) W открыто $\Leftrightarrow W=\mathrm{Int}W\Leftrightarrow W\cap\partial W=\varnothing$;

3) $\partial W=\overline{W}\cap\overline{(X\setminus W)}$;

4) $\mathrm{Int}W=W\setminus\partial W$;

5) W замкнуто $\Leftrightarrow\partial W\subset W$.

9. Доказать, что для отображения $f:X\to Y$ метрического пространства (X,ρ_1) в метрическое пространство (Y,ρ_2)

$f:X\to Y$ □χ□υ□ υ □□χ $x_0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\rho_1(x,x_0)<\delta\Rightarrow\rho_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$

10. Пусть X,Y — произвольные топологические пространства. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны: 1) f непрерывно; 2) для каждого множества $W\subset X$: $f(\overline{W})\subset\overline{f(W)}$; 3) для каждого множества $Z\subset Y$: $\overline{f^{-1}(W)}\subset f^{-1}\overline{(Z)}$.

11. Докажите, что интервал $(a,b)\subset\mathbb{R}^1$ гомеоморфен $\mathbb{R}^1$.

12. Докажите, что открытый шар $B(x_0,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

13. Докажите, что диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

14. Докажите, что условие регулярности функции Лагранжа не зависит от выбора обобщ $\ddot{\chi}$ нных координат.

15. Проверить, что коммутатор векторных полей является векторным полем, то есть проверьте, что на пересечении карт

$$[V,W]^{i'}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)=[V,W]^j.$$

16. Докажите, что отображение $f:N\to M$ тогда и только тогда является локальным диффеоморфизмом в точке p, когда его дифференциал в этой точке, $(df)_p:T_pN\to T_{f(p)}M$, является изоморфизмом.
17. Пусть Y — подпространство топологического пространства X. Приведите пример, когда открытое (замкнутое) множество в Y не открыто (соответственно, не замкнуто) в X.
18. Докажите, что замыкание в Y всякого множества $M\subset Y$ является пересечением с подпространством $Y\subset X$ замыкания множества M в X.
19. Пусть X — топологическое пространство и $Y\subset X$ — подмножество в X. Докажите, что наследственная топология является слабейшей среди всевозможных топологий на Y, для которой отображение вложения $i:Y\to X$ непрерывно.
20. Докажите, что линейная комбинация и коммутатор векторных полей, касающихся подмногообразия, также касается подмногообразия, опираясь на явное выражение для таких векторных полей в локальных координатах, согласованных с подмногообразием.
21. Вычислить попарные коммутаторы векторных полей

$$X_1=x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2},\qquad X_2=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\qquad X_3=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1},$$

заданных в $\mathbb{R}^3$.
22. Покажите, что если для двух распределений $p\to E_p^1$ и $p\to E_p^2$ на M размерность подпространств $E_p^1\bigcap E_p^2$ постоянна, т.е. не зависит от точки p, то поля подпространств $p\to E_p^1\bigcap E_p^2$ и $p\to E_p^1+E_p^2$ являются распределениями.
23. Найдите интегральные кривые векторных полей $X=e^x\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $X=(1+x^2)\dfrac{\partial}{\partial x}$ на прямой. Докажите, что эти векторные поля неполные.
24. Нарисовать линии уровня каких нибудь выпрямляющих координат для следующих векторных полей на плоской области $U\subset\mathbb{R}^2$:

$$1)\ X=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y},\qquad U=\{x,y\mid x>0\},\qquad 2)\ X=\frac{\partial}{\partial x}+\sin x\frac{\partial}{\partial y},\qquad U=\mathbb{R}^2,$$

$$3)\ X=x\frac{\partial}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial}{\partial y},\qquad U=\{x,y\mid -1<x<1\}.$$

25. Пусть X — гладкое векторное поле в пространстве $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой. Поле X называется *полем нормалей*, если через каждую точку $\mathbb{R}^3$ проходит некоторая поверхность Σ, в каждой точке $p\in\Sigma$ которой вектор X_p (анти)коллинеарен вектору нормали к поверхности. Доказать, что необходимое и достаточное условие, чтобы векторное поле $X\in Vect(\mathbb{R}^3)$ было полем нормалей, имеет вид $(X,\mathrm{rot}X)=0$.
26. Построить реализацию вещественных грассмановых многообразий как фактормножеств множества $\mathrm{Mat}(k,n;k,\mathbb{R})$ по некоторому отношению эквивалентности.
27. Проверить, что для фактортопологии выполнены аксиомы топологии.
28. Докажите, что подпространство хаусдорфова топологического пространства является хаусдорфовым.
29. Реализуйте нехаусдорфову прямую с особой точкой бесконечной кратности как фактормногообразие некоторого слоения.

30. Проверить выполнение аксиом базы для топологии прямого произведения пространств.
31. Докажите, что диагональ квадрата топологического пространства X гомеоморфна X.
32. Докажите, что прямое произведение хаусдорфовых топологических пространств хаусдорфово.
33. Докажите, что топологическое пространство X тогда и только тогда линейно связно, когда любая точка $x \in X$ может быть соединена кривой с некоторой фиксированной точкой $x_0 \in X$
34. Докажите, что сферы $\mathbb{S}^n$ линейно связны.
35. Докажите, что прямое произведение линейно связных пространств линейно связно.
36. Докажите, что в топологическом пространстве X с первой аксиомой сч $\ddot{\chi}$ тности для любого подмножества имеют место следующие свойства:
1) $x \in M' \Leftrightarrow$ существует последовательность $\{x_n \in M, n = 1, 2, \ldots\}$, сходящаяся к точке x
2) M замкнуто, если, и только если, предел любой сходящейся последовательности точек из M также принадлежит M.
37. Доказать, что подмножество $M \subset X$ тогда и только тогда компактно, когда любое покрытие множества M открытыми множествами в X содержит конечное подсемейство, также покрывающее M.
38. Докажите, что непрерывное взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$ компактного топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y есть гомеоморфизм.
39. Доказать компактность комплексных многообразий Грассмана $G_{k,n}(\mathbb{C})$.
40. Доказать связность многообразий Грассмана $G_{k,n}(\mathbb{R})$ и $G_{k,n}(\mathbb{C})$.
41. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме сч $\ddot{\chi}$ тности. Докажите, что X тогда и только тогда компактно, когда из каждой бесконечной последовательности элементов $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.
42. Пусть $\xi' \subset \xi$ — подрасслоение расслоения ξ. Докажите, что существует покрытие $\{U_\alpha\}$ базы расслоений M, состоящее из тривиализирующих окрестностей обоих расслоений ξ и ξ' (то есть $\xi|_{U_\alpha}$ и $\xi'|_{U_\alpha}$ тривиальны) и такие тривиализирующие базисы $\{e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha k}\}$ расслоения ξ над каждой окрестностью U_α, что первые k' сечений $e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha k'}$ образуют тривиализирующий базис расслоения ξ' над U_α. Здесь $k = \mathrm{r}ank\,\xi$, $k' = \mathrm{r}ank\,\xi'$.
43. Доказать, что для двух линейных подпространств M, N, дающих в сумме линейное пространство V, следующие условия эквивалентны:
а) $V = M \oplus N$;
б) всякий вектор $\vec{x} \in V$ однозначно представляется в виде суммы $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in M$, $\vec{z} \in N$;
в) нулевой вектор однозначно представляется в виде суммы векторов из M и N;
г) если $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_a, \ldots\}$ – базис в M и $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_b, \ldots\}$ – базис в N, то множество векторов $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_a, \ldots, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_b, \ldots\}$ образует базис в V.
44. Пусть $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ — два базиса в линейном пространстве V, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ и $\{f^1, \ldots, f^n\}$ — соответствующие дуальные базисы в V^* и $C \in GL(n, \mathbb{K})$ — матрица

перехода от базиса $\{\vec{e}_a\}$ к базису $\{\vec{f}_b\}$. Доказать, что матрица перехода от дуального базиса $\{e^a\}$ к базису $\{f^b\}$ равна $(C^{-1})^T$.

45. Билинейная форма $(\,,\,)$ на конечномерном линейном пространстве V определяет изоморфизм $\varphi : V \to V^*$. Найти явное выражение для φ во взаимно дуальных базисах пространств V и V^* через матрицу $J = (J_{ab})$ билинейной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$.

46. Доказать корректность определения линейного оператора $\hat{A}^+ \in \mathrm{E}nd\bar{V}^*$. Доказать, что если $n = \dim V < \infty$ и $A = (A^a_b) \in \mathrm{M}at(n, \mathbb{K})$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ пространства V, то матрица оператора $\hat{A}^+$ в дуальном базисе $\{e^{\bar{1}}, \ldots e^{\bar{n}}\}$ сопряж $\ddot{\chi}$ нного пространства равна A^+.

47. Пусть $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ — два базиса в линейном пространстве V, $\{e^{\bar{1}}, \ldots, e^{\bar{n}}\}$ и $\{f^{\bar{1}}, \ldots, f^{\bar{n}}\}$ — соответствующие дуальные базисы в V^* и $C \in GL(n, \mathbb{K})$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{e}_a\}$ к базису $\{\vec{f}_b\}$. Доказать, что матрица перехода от дуального базиса $\{e^{\bar{a}}\}$ к базису $\{f^{\bar{b}}\}$ равна $(C^{-1})^+$.

48. Полуторалинейная форма $\langle\,,\,\rangle$ на конечномерном линейном пространстве V определяет изоморфизм $\varphi : V \to V^*$. Найти явное выражение для φ во взаимно дуальных базисах пространств V и $\bar{V}^*$ через матрицу $J = (J_{\bar{a}b})$ полуторалинейной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$.

49. Доказать корректность определения тензорного произведения линейных операторов.

50. Выписать в блочной форме всевозможные (всего 16 штук) попарные тензорные произведения матриц единичной матрицы и матриц Паули.

51. Докажите, что если $A_1, A_2 \in \mathrm{M}at(m, \mathbb{K})$, $B_1, B_2 \in \mathrm{M}at(n, \mathbb{K})$, то $(A_1 \otimes B_1) \cdot (A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2)$.

52. Докажите, что если $A \in \mathrm{M}at(m, \mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}at(n, \mathbb{K})$, то $\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m$.

53. Докажите, что $\mathrm{A}lt\sigma T = \sigma(\mathrm{A}lt T) = \varepsilon(\sigma)\mathrm{A}lt T$, $\mathrm{S}ym\sigma T = \sigma(\mathrm{S}ym T) = \mathrm{S}ym T$ для любого тензора $T \in V^{p,q}$ и для любой подстановки $\sigma \in S_q$.

54. Докажите, что если $T \in V^{p,q}$ и $q > 1$, то $\mathrm{A}lt(\mathrm{S}ym T) = \mathrm{S}ym(\mathrm{A}lt T) = 0$.

55. Пусть $q \leqslant n = \dim V$ и $\alpha^1, \ldots, \alpha^q \in V^*$ — линейно независимые ковекторы на V, и пусть $\beta^1, \ldots, \beta^q \in V^*$ — такие ковекторы, что $\sum_{i=1}^{q} \alpha^i \wedge \beta^i = 0$. Докажите, что тогда существуют такие числа $a^{ij}, i, j = 1, \ldots, q$, что $a^{ij} = a^{ji}$ и $\beta^i = \sum_{j=1}^{q} a^{ij}\alpha^j, \qquad i = 1, \ldots, q$.

56. Докажите, что $\omega \in \wedge^2 V$ тогда и только тогда разложим, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

57. Пусть $\alpha^1, \ldots, \alpha^q \in V^*$ и пусть $\beta^i = \sum_{j=1}^{q} a^i_j \alpha^j$. Докажите, чт

$\beta^1 \wedge \ldots \wedge \beta^q = \det(A)\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^q$, где $A = (a^i_j) \in \mathrm{M}at(q, \mathbb{K})$

Открытый перечень задач по темам 2, 3.

1. Доказать, что для любых гладких векторных полей $X, Y \in \mathrm{V}ect(M)$ на многообразии M во внешней алгебре справедливо тождество $[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$.

2. * Докажите, что для любого подпространства $M \subset V$ в конечномерном линейном пространстве $\mathrm{d}imM + \mathrm{d}imM^0 = \mathrm{d}imV$. Докажите, что $\mathrm{A}nn\mathrm{A}nnM \cong M$.

3. * Пусть $J \subset M$ — идеал форм, локально порожд $\ddot{\chi}$ нный s независимыми один-формами $\alpha^1, \dots, \alpha^s \in \Omega^1 U$ на окрестности U. Докажите, что J тогда и только тогда является дифференциальным идеалом, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $\mathrm{d}\alpha^i = \sum_{j=1}^{s} \omega^{ij} \wedge \alpha^j$ для некоторых один-форм $\omega^{ij} \in \Omega^1 U, i, j = 1, \dots, s$;

2) если $\alpha = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^r$, то $\mathrm{d}\alpha = \omega \wedge \alpha$ для некоторой один-формы $\omega \in \Omega^1 U$.

4. Проверьте, тождество:

$$| g |^{-1/2} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_{n-r} j_{n-r}} \varepsilon^{j_1 \cdots j_{n-r} j_{n-r+1} \cdots j_n} = | g |^{1/2} \varepsilon_{i_1 \cdots i_{n-r} i_{n-r+1} \cdots i_n} g^{i_{n-r+1} j_{n-r+1}} \dots g^{i_n j_n} .$$

5. а) Покажите, что в применении к гладкой функции f оператор Лапласа в локальных координатах имеет вид $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{| g |}} \partial_i (g^{ij} \sqrt{| g |} \partial_j f(x))$, где $\partial_i \equiv \partial / \partial x^i$.

б) Докажите тождества: $\Delta \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \Delta$; $\Delta \circ \delta = \delta \circ \Delta$, $\Delta \circ * = * \circ \Delta$.

6. Покажите, что вторая пара уравнений Максвелла в вакууме записывается в виде $* \mathrm{d} * F = \frac{4\pi}{c} J$, или, равносильно, $\delta F = \frac{4\pi}{c} J$.

7. Из закона преобразования коэффициентов связности $\Gamma^a_{ib} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) g^a_{a'} g^{b'}_b \Gamma^{a'}_{i' b'} + g^a_{a'} \frac{\partial g^{a'}_b}{\partial x^i}$

выведите формулу обратного преобразования: $\Gamma^{a'}_{i' b'} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) g^{a'}_a g^b_{b'} \Gamma^a_{ib} + g^{a'}_a \frac{\partial g^a_{b'}}{\partial x^{i'}}$.

8. Проверьте, что формула $(\nabla_X \lambda)(s) = X(\lambda(s)) - \lambda(\nabla_X (s))$ корректно определяет сечение $\nabla_X \lambda \in \Gamma(\xi^*)$. Докажите, что на координатной тривиализирующей окрестности справедлива формула $(\nabla_i \lambda)_a = \frac{\partial \lambda_a}{\partial x^i} - \Gamma^b_{ia} \lambda_b$.

9. Выведите формулу для компонент ковариантной производной ξ -тензорного поля T в тривиализирующей координатной окрестности.

10. Докажите, один-формы $\theta^a = dy^a + \Gamma^a_{ib} y^b dx^i$ в адаптированный координатах являются аннулирующими для поля горизонтальных подпространств, где $(\Gamma^a_{ib} dx^i)$ — матрица один-форм связности. Проверьте, что на пересечении адаптированных карт $\theta^{a'} = g^{a'}_a \theta^a$.

11. Докажите, что группы голономии в различных точках векторного расслоения со связностью над связной базой изоморфны.

12. Проверить тензорный закон преобразования тензора кривизны связности на произвольном векторного расслоении прямым вычислением.

13. Проверьте, что формула $Ds|_U = (d + \omega \wedge) s|_U$ корректно, то есть независимо от выбора тривиализации, определяет сечение $Ds \in \Gamma(\wedge^{r+1} T^* M \otimes \xi)$.

14. Докажите, что функционал тре $\ddot{\chi}$ $R(X,Y)s$ от аргументов X, Y, s , заданный в векторном расслоении со связностью формулой $R(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$ $F(M)$ -линеен по каждому аргументу.

15. Докажите, что отображение
$T : \mathrm{V}ect(M) \times \mathrm{V}ect(M) \to \mathrm{V}ect(M) : X, Y \to T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ $F(M)$-линейно по каждому аргументу. Найдите компоненты T^i_{jk} тензора кручения T в локальных координатах.

16. Доказать, что функция $f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$ бесконечно дифференцируема при $t = 0$.

17. Пусть M — гладкое хаусдорфово многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме сч $\ddot{\chi}$ тности, $p \in M$ — произвольная фиксированная точка, $S_p \in T^{r,s}_p M$ — тензор произвольного типа $r \geqslant 0, s \geqslant 0$ на касательном пространстве $T_p M$. Докажите, что на многообразии M существует гладкое тензорное поле S типа (r,s), принимающее в точке p значение S_p.

Открытый перечень задач по темам 4, 5.

21. Пусть M — гладкое хаусдорфово риманово (метрика положительно определена) ориентированное многообразие со второй аксиомой сч $\ddot{\chi}$ тности и $\Omega^k_{fin}(M)$ — множество дифференциальных форм степени k на M с компактным носителем. Для любых таких дифференциальных форм $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k_{fin}(M)$ положим

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_M \omega_1 \wedge *\omega_2.$$

Докажите, что для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k_{fin}(M)$:

1) $(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2, \omega_1)$ и $(\omega_1, \omega_1) > 0$ для любой $\omega_1 \neq 0$, то есть $(,)$ — евклидово скалярное произведение на $\Omega^k_{fin}(M)$.

2) $(*\omega_1, *\omega_2) = (\omega_1, \omega_2)$, то есть оператор $*$ ортогонален.

3) $(\mathrm{d}\omega_1, \omega_3) = (-1)^{nk+n+1}(\omega_1, \delta\omega_3)$ для любой $\omega_3 \in \Omega^{k+1}_{fin}(M)$, то есть операторы d и $(-1)^{nk+n+1}\delta$ сопряжены в евклидовом пространстве $(\Omega_{fin}(M), (,))$.

4) $(\Delta\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \Delta\omega_2)$, то есть оператор Лапласа самосопряж $\ddot{\chi}$ н.

22. Найти все левоинвариантные один-, два- и три-формы на группе вращений $SO(3, \mathbb{R})$ в параметризации Эйлера. Проверить, что произвольная левоинвариантная два-форма на группе вращений замкнута. Можно ли предвидеть этот результат без вычислений? Найти меру Хаара для группы вращений.

23. Пусть G — ориентированная n-мерная компактная группа Ли и $\omega \in \Omega^n_{linv} G$ — некоторая ненулевая левоинвариантная дифференциальная n-форма. Докажите, что $\int_G \omega \neq 0$.

24. Пусть G — ориентированная компактная группа Ли, $\Psi : G \to G$, $\Psi(g) = g^{-1}$. Докажите, что для любой левоинвариантной n-формы $\omega \in \Omega^n_{linv} G$, $\Psi^* \omega = \omega$ и $\int_G f \circ \Psi = \int_G f$ для любой функции $f \in F(G)$.

25. Докажите, что замкнутые формы образуют подалгебру внешней алгебры $\Omega(M)$, то есть что внешнее произведение замкнутых дифференциальных форм замкнуто. Докажите, что внешнее произведение замкнутой дифференциальной формы на точную

является точной дифференциальной формой. Докажите, что формула $[\omega_1]\cdot[\omega_2]=[\omega_1\wedge\omega_2]$ корректно определяет (кососкоммутативное) умножение $\cdot$ в пространстве когомологий де Рама $H(M)$.

26. Докажите, что определение дифференциальной формы типа (p,q) на комплексном многообразии имеет инвариантный смысл.

27. Докажите, что отношение гладкой гомотопности отображений $f\sim g$ является отношением эквивалентности. Докажите, что отношение гомотопности многообразий является отношением эквивалентности.

28. Пусть $F_{ab}(x)$ — тензор напряжённости электромагнитного поля в пространстве Минковского. Прямым вычислением проверьте, что формула $A_a(x)=\int\limits_0^1 tF_{ba}(tx)x^b\,\mathrm{d}t$ определяет четырёхмерный потенциал поля.

29. Пусть M — комплексное многообразие, $\omega\in\Omega^{p,q}(M)$ — замкнутая дифференциальная форма типа (p,q), где $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$. Докажите, что для любой точки $p\in M$ найдётся окрестность $U\ni p$ и дифференциальная форма $\psi\in\Omega^{p-1,q-1}(U)$, такие, что $\omega|_U=\partial\bar{\partial}\psi$.

30. Вычислите $H^1(\mathbb{S}^1)$ с помощью четырёхэлементного покрытия дугами окружностей (полуокружностями).

31. Докажите, существующий произвол в определении коцикла f по замкнутой дифференциальной форме не влияет на когомологический класс $[f]\in H^p(\mathcal{U};\mathbb{R})$.

32. Вычислить все группы сингулярных гомологий одноточечного пространства.

33. Докажите, что для линейно связного топологического пространства X (в частности, для связного многообразия) $H^0(X,G)\equiv \mathrm{K}er\partial_0^*\cong G$. Докажите, что при $f,g:M\to N$ и $f\sim g$, то порождённые гомоморфизмы $f^*:H^0(N,G)\to H^0(M,G)$ и $g^*:H^0(N,G)\to H^0(M,G)$ совпадают.

34. Рассмотрите дифференциальное векторное пространство $(\mathbb{R}^3,d)$, где дифференциал d в стандартном базисе задаётся матрицей

$$d=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad d^2=0.$$

Найдите подпространства кограниц, коциклов, вычислите $\dim H(\mathbb{R}^3,d)$.

35. Пусть когомология конечномерного дифференциального пространства (A,d) равна нулю. Покажите, что линейный оператор $h:A\to A$ заданный в каноническом базисе соотношениями $hb_i=c_i$, $hc_i=0$ является стягивающей гомотопией для d.

36. Покажите, что без потери общности можно считать, что стягивающая гомотопия (если существует) является дифференциалом пространства A, то есть $h^2=0$. (*Указание:* рассмотрите отображение $h'=hdh$, где h — некоторая стягивающая гомотопия).

37. Предположим, что все пространства когомологий $H^p(C)$ *конечного* комплекса C конечномерны. Эйлеровой характеристикой комплекса C называется число $\chi(C)=\sum_p(-1)^p\dim H_p(C)$. Покажите, что

(a) в случае, когда все однородные векторные пространства C_p, составляющие комплекс C, конечномерны, эйлерова характеристика может быть вычислена по формуле $\chi(C) = \sum_p (-1)^p \dim C_p$;

(b) сумма размерностей пространств когомологий комплекса C не меньше его эйлеровой характеристики, $\chi(C) \leqslant \sum_p \dim C_p$;

(c) для любой конечной точной последовательности конечномерных векторных пространств $0 \to C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_p \to 0$ имеет место равенство $\sum_{n=0}^{p} (-1)^n \dim C_p = 0$.

38. Вычислить когомологии де Рама плоскости $\mathbb{R}^2_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots p_n\}$ с n выколотыми точками. (*Указание.* Решите задачу при $n = 1, 2$, затем примените индукцию по числу точек. В качестве покрытия $\mathbb{R}^2_n$ рассмотрите выколотые шаровые окрестности точек $p_1, p_2, \dots$ и также примените индукцию.)

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

1. Примеры гладких многообразий.
2. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы.
3. Векторные поля. Интегральные кривые векторных полей. Теорема о выпрямляемости. Дифференциал гладкого отображения.
4. Подпространства и подмногообразия.
5. Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.
6. Факторпространства.
7. Хаусдорфовы пространства.
8. Связные пространства.
9. Компактные пространства.
10. Прямая сумма, тензорное произведение линейных пространств. Сопряженное и комплексно сопряженное пространства.
11. Тензоры на линейном пространстве.
12. Внешняя алгебра на линейном пространстве.
13. Векторные расслоения. Операции с векторными расслоениями: прямая сумма, тензорное произведение, дуальное расслоение, тензорная алгебра. Подрасслоения и факторрасслоения, внешняя алгебра расслоения, редукция расслоения. Теоремы вложения.
14. Переносы тензорных полей посредством диффеоморфизмов. Прообразы ковариантных тензорных полей при гладких отображениях. Поток, порожденный векторным полем.
15. Производная Ли.
16. Векторные поля Киллинга.
17. Внешний дифференциал. Свертка и производная Ли дифференциальной формы.
18. Оператор Ходжа. Операции классического векторного анализа.
19. Ковариантное дифференцирование, ковариантный дифференциал на векторном расслоении.
20. Параллельный перенос в векторном расслоении, группа голономии.
21. Тензор кривизны связности в векторном расслоении.
22. Связности на метризованных векторных расслоениях.
23. Интегрирование дифференциальных форм в R^n.
24. Интегрирование по цепям. Теоремы Стокса для интеграла по цепям.

25. Ориентируемые многообразия. Интегрирование по ориентированному многообразию. Теорема Стокса.
26. Интегрирование на римановом многообразии. Интегрирование на группе Ли
27. Когомологии де Рама. Лемма Пуаннкаре.
28. Последовательность Майера – Вьеториса.
29. Характеристические классы векторного расслоения.

г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.
Самостоятельная работа студентов состоит из следующих частей:
- проработка конспекта;
- проработка материала по одному из основных рекомендованных учебников;
- самостоятельное решение задач и подготовка к практическим занятиям;
- проработка дополнительных материалов по дисциплине в соответствии с тематикой учебной практики
Примерные темы рефератов для самостоятельной углубленной работы студентов в соответствии с тематикой учебной практики:
1) Главные и ассоциированные расслоения. Расслоения с типичным слоем.
2) Связности в главных и ассоциированных расслоениях.
3) Калибровочные поля как связности в главных и ассоциированных расслоениях.
4) Когомологии пучков.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия: методы и приложения. – М.: Наука. 1979. – 760 с.
2. Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. – М. Наука, Физматлит. 1995. – 416 с.
3. Ф. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. – М.: Мир. 1987. – 304 с.
4. М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. – М.: Наука. Физ.-мат. лит. 1987. – 480 с.
5. М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука. Физ.-мат. лит. 1987. – 496 с.
6. В.В. Трофимов. Введение в геометрию многообразий с симметриями. – М.: Изд-во МГУ. 1989. – 360 с.
7. И.П. Волобуев, Ю.А. Кубышин. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля. – М.: Эдиториал УРСС. 1998. – 224 с

б) дополнительная литература:

1. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. В 2 т. – М. Наука. 1981. 344 с.+344 с.
2. М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. – М.: Изд-во «Факториал». 1998. – 496 с.
3. С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир. 1970. – 412с.
4. А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ. 1980. – 440 с.
5. А.Т. Фоменко, С.П. Новиков. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука. 1987. – 432 с.
6. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Мир. 1964. – 534 с.
7. А.Т. Фоменко. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. – М.: Изд-во МГУ. 1983. – 216 с.

8. Р. Зуланке, П. Винтген. Дифференциальная геометрия и расслоения. – М.: Мир. 1975. – 352 с.
9. Р. Уэллс. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. – М.: Мир. 1973. – 288 с.
10. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. В 2 т. – М.: Мир. 1982. --- 496 с.+366 с.
11. А.Т. Фоменко. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. – М.: Изд-во МГУ. 1992. – 432 с.
12. Н. Стинрод, У. Чинн. Первые понятия топологии. – М.: Мир. 1967. – 224 с.

в) ресурсы сети Интернет:

Differential geometry
https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry
Glossary of differential geometry and topology
https://en.wikipedia.org/wiki/Glossary_of_differential_geometry_and_topology
Lecture Notes on Differential Geometry
http://people.math.gatech.edu/~ghomi/LectureNotes/
Topics in Differential Geometry
www.mat.univie.ac.at/~michor/dgbook.pdf
Введение в теорию гомологий
www.mi.ras.ru/noc/lectures/03kazarian.pdf
М.О. Катанаев Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 1
http://www.mathnet.ru/links/960e758fab2c06fbb3eb09f8d38973ed/book1603.pdf
М. О. Катанаев Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 2
http://www.mathnet.ru/links/308446cb279f9352012e4a8468f2406f/lkn26.pdf
М. О. Катанаев Математические основы общей теории относительности. Часть 1
http://www.mathnet.ru/links/0ad2738fafc64fb0024fdca2b494a1a8/book1699.pdf
М. О. Катанаев Математические основы общей теории относительности. Часть 2
http://www.mathnet.ru/links/5a547795171174f5a34b57aeb3702eb8/lkn29.pdf

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTex;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index

– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

– ЭБС Консультант студента – http://www.studentlibrary.ru/

– Образовательная платформа Юрайт – https://urait.ru/

– ЭБС ZNANIUM.com – https://znanium.com/

– ЭБС IPRbooks – http://www.iprbookshop.ru/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате, оснащенные системой («Актру»).

15. Информация о разработчиках

Горбунов Иван Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.